FACULTADE DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

A álxebra exterior das formas diferenciais

Tomás Otero Casal

2018/2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

GRAO DE MATEMÁTICAS

Traballo Fin de Grao

A álxebra exterior das formas diferenciais

Tomás Otero Casal

Xullo 2019

UNIVERSIDADE DE SANTIAGO DE COMPOSTELA

Traballo proposto

Área de Coñecemento: Xeometría e Topoloxía
Título: A álxebra exterior das formas diferenciais
Breve descrición do contido
O propósito deste proxecto é o estudo da álxebra exterior das formas diferenciais dunha variedade diferenciable. Débense introducir previamente os espazos fibrados exteriores. Trataranse as derivacións e as antiderivacións de formas diferenciais, e sobre todo a diferencial exterior, a derivada de Lie e o produto interior respecto dos campos de vectores, e as relacións entre estes operadores.
Recomendacións
Outras observacións

Índice xeral

Resumo

As formas diferenciais, introducidas por Élie Cartan, son obxectos que aparecen de forma natural en cálculo multivariable, xeometría diferencial e física. O obxectivo deste traballo é estudar algunhas nocións elementais sobre as formas diferenciais en variedades diferenciables. As formas diferenciais defínense como seccións diferenciables de certos fibrados vectoriais, e teñen estrutura de álxebra exterior graduada. Estudamos algúns operadores lineares que son derivacións e antiderivacións da álxebra exterior das formas diferenciais e dependen só da estrutura diferenciable da variedade: a diferencial exterior, a derivada de Lie con respecto dun campo de vectores e o produto interior ou contracción cun campo de vectores; estudamos tamén as relacións entre estes operadores. Analizamos ademais como a diferencial exterior da lugar a certos espazos vectoriais asociados functorialmente ca variedade, o que leva á cohomoloxía de De Rham.

Abstract

Differential forms, introduced by Élie Cartan, are objects that occur naturally in multivariable calculus, differential geometry and physics. The goal of this work is to study elementary facts concerning differential forms on manifolds. They are defined as differentiable sections of certain vector bundles and have an algebraic structure of graded exterior algebra. We study some linear operators which are derivations or anti-derivations of the exterior algebra of differential forms and depend only on the differentiable structure of the manifold: the exterior derivative, the Lie derivative with respect to some vector field and the interior product or contraction with a vector field; we also study the interaction between these operators. We analyze as exterior differentiation gives rise to some vector spaces functorially associated with the manifold and leads to de Rham cohomology.

Introdución

No estudo das variedades diferenciables aparecen de maneira natural as formas diferenciais. Unha forma sobre unha variedade consiste nunha asignación dunha aplicación multilinear antisimétrica a cada punto da variedade, tal como un campo de vectores consiste en facer corresponder a cada punto un vector tanxente. As formas diferenciais deben cumprir ademais con certas condicións de regularidade. O xeito de definilas dun modo preciso facilítase a través de obxectos relacionados coas variedades de partida que posúen estrutura tanto de espazos fibrados como de variedade diferenciable; estes son o fibrado tanxente para os campos e os fibrados exteriores para as formas diferenciais.

O propósito desta memoria é facer unha introdución ao estudo das formas diferenciais sobre unha variedade diferenciable como seccións de fibrados exteriores da variedade, e as súas derivacións e antiderivacións. Analizaranse, en particular, os operadores produto interior e derivada de Lie respecto de campos de vectores e a diferencial exterior.

No primeiro capítulo presentamos algunhas nocións básicas da teoría de variedades diferenciables que se necesitan para o estudo do resto do traballo. Estes resultados xa foron vistos no grao en matemáticas, na materia optativa "Variedades Diferenciables", polo que non incluímos as demostracións dos resultados que se poñen de relevo.

Comezamos o segundo capítulo cun estudo sobre os espazos fibrados vectoriais. A noción de espazo fibrado é importante en topoloxía e en xeometría diferencial, e tamén en física, xa que os campos de tensores que aparecen en modelos físicos poden verse como seccións de certos fibrados. Se a cada punto p dunha variedade diferenciable M se lle asocia un espazo vectorial E_p isomorfo a un espazo vectorial real fixo F de dimensión finita cunha certa condición de compatibilidade, o conxunto unión $E = \bigcup_p E_p$ acada unha topoloxía e unha estrutura diferenciable coa que se converte nunha variedade diferenciable, cunha proxección π sobre a variedade M. Tense así un espazo fibrado vectorial $\xi = (E, \pi, M, F)$, onde F é a fibra típica, mentres que E_p é a fibra sobre p; tamén se acostuma a chamar espazo fibrado vectorial ao seu espazo total E. No caso particular no que cada fibra E_p é o espazo tanxente $T_p(M)$ tense o fibrado tanxente $T(M)$; as súas seccións, é dicir, as seccións da proxección natural $\pi\colon T(M) \to M$ son os campos de vectores sobre M. Os campos de vectores diferenciables tamén se poden interpretar como derivacións da álxebra $\mathcal{F}(M)$ de funcións diferenciables reais da variedade, o que da lugar a unha operación importante denominada produto corchete ou corchete de Lie, que combina dous campos de vectores diferenciables X e Y para construír outro campo de vectores diferenciable $[X,Y]$. Consideramos os fluxos locais asociados a un campo de vectores, que se poden pensar como familias de curvas parametrizadas (as curvas integrais) que son tales que os seus vectores tanxentes son os vectores que define o campo.

No terceiro capítulo introdúcense os espazos $\mathcal{E}^k(M)$ de formas diferenciais de grao k sobre unha variedade M para cada enteiro $k \geq 0$ e a álxebra exterior $\mathcal{E}^*(M) = \bigoplus \mathcal{E}^k(M)$ de tódalas formas diferenciais sobre M. A partir dos espazos duais $T_p^*(M)$ dos espazos tanxentes en cada punto p de M obtense o fibrado cotanxente $T^*(M)$, e as súas seccións son as formas de grao 1. As formas de grao 0 son as funcións reais diferenciables, $\mathcal{E}^0(M) = \mathcal{F}(M)$, e as súas diferenciais son formas de grao 1. Para introducir as formas de grao $k \geq 1$ constrúese previamente o fibrado exterior $\bigwedge^k T(M)$, onde a fibra en cada punto $p \in M$ é o espazo vectorial das k-formas lineares $\bigwedge^k\big(T_p(M)\big)$, é dicir, das aplicacións multilineares antisimétricas $T_p(M) \times \overset{(k)}{\cdots} \times T_p(M) \to \mathbb{R}$; en particular, $\bigwedge^1 T(M) = T^*(M)$. O conxunto de tódalas seccións diferenciables do fibrado exterior $\bigwedge^k T(M)$ é $\mathcal{E}^k(M)$, así que, como diciamos arriba, os elementos de $\mathcal{E}^1(M)$ son as seccións diferenciables do fibrado cotanxente $T^*(M)$. As formas de grao k pódense sumar e multiplicar por escalares reais e por funcións, co que cada $\mathcal{E}^k(M)$ é un espazo vectorial real e un módulo sobre o anel $\mathcal{F}(M)$; ademais tense un produto exterior dunha forma ω de grao r e unha forma η de grao s para dar lugar a unha forma $\omega \wedge \eta$ de grao $r + s$ e, ao estender este produto exterior a $\mathcal{E}^*(M)$ por bilinearidade, o espazo vectorial suma directa $\mathcal{E}^*(M)$ transfórmase nunha álxebra graduada anticonmutativa sobre $\mathbb{R}$, que é a álxebra exterior das formas diferenciais sobre M. É interesante resaltar que as formas diferenciais teñen expresións locais en coordenadas a partir de funcións diferenciables e as súas diferenciais; en particular as formas diferenciais de grao 1 están xeradas localmente polas diferenciais das funcións, así que, por medio do produto exterior de formas de grao 1 obtéñense localmente as formas de calquera grao. Por outra banda as formas de grao 1 son obxectos duais dos campos de vectores e teñen sobre os campos a vantaxe da functorialidade, que se segue de que cada aplicación diferenciable entre variedades $f\colon M \to N$ induce dun xeito natural un homomorfismo de álxebras graduadas $f^*\colon \mathcal{E}^*(N) \to \mathcal{E}^*(M)$.

No cuarto capítulo defínense as derivacións e antiderivacións da álxebra exterior $\mathcal{E}^*(M)$, e demóstrase que son operadores locais que están completamente determinados pola súa acción sobre as funcións diferenciables e sobre as diferenciais das funcións. Isto facilita o estudo de tres casos moi importantes:

- O produto interior (ou contracción) $\boldsymbol{\iota}_X$ por un campo de vectores diferenciable X sobre M, que é unha antiderivación que diminúe en 1 o grao das formas diferenciais.
- A derivada de Lie $\mathcal{L}_X$ respecto dun campo de vectores diferenciable X sobre M, que é unha derivación que mantén o grao das formas diferenciais.
- A diferencial exterior $\mathbf{d}$, que é unha antiderivación que aumenta en 1 o grao das formas diferenciais e que está caracterizada pola chamada "fórmula máxica de Cartan" ou identidade de Cartan:
$$\mathcal{L}_X = \mathbf{d} \circ \boldsymbol{\iota}_X + \boldsymbol{\iota}_X \circ \mathbf{d}.$$

Tense a relación $\mathbf{d}^2 = 0$, que é outro modo de establecer o teorema de Schwarz da igualdade entre as derivadas parciais cruzadas. Se $f\colon M \to N$ é unha aplicación diferenciable entre variedades entón $\mathbf{d} \circ f^* = f^* \circ \mathbf{d}$, que significa que a diferencial exterior, que é un operador definido exclusivamente a partir da estrutura diferenciable da variedade, é invariante polas aplicacións diferenciables entre variedades. Por este carácter invariante, moitas das ecuacións da física e da xeometría preséntanse de maneira sinxela ao expresarse en termos da diferencial exterior. A diferencial exterior permite ademais definir as formas pechadas e as formas exactas e leva a considerar os grupos de cohomoloxía de De Rham $H^k(M)$, $k \geq 0$. Tódalas formas exactas son pechadas e $H^k(M)$ mide ata que punto as formas pechadas de grao k son exactas. Por último probarase o lema de Poincaré, que afirma que para calquera aberto estrelado U de $\mathbb{R}^n$, $H^k(U) = 0$ para cada $k \geq 1$ e que toda forma pechada de grao ≥ 1 sobre calquera variedade diferenciable é localmente exacta.

Para o presente estudo seguimos principalmente os libros de Lee [9], Tu [15] e Matsushima [10], e tamén utilizamos os textos de Greub, Halperin e Vanstone [7] na sección de fibrados vectoriais, así como os de Aubin [1], Godbillon [6], Pham [12] ou Morita [11] en canto á álxebra exterior $\mathcal{E}^*(M)$ e as súas derivacións e antiderivacións. Inclúense tamén as referencias aos libros de Burke [3], Frankel [4], Göckeler e Schücker [5], e Rudolph e Schmidt [13, 14], onde se pode apreciar a utilización das formas diferenciais en relación tanto coa física clásica como coa física moderna e tamén a enxeñaría.

Capítulo 1

Variedades diferenciables

Imos comezar fixando a terminoloxía que necesitaremos sobre as variedades diferenciables. As variedades podemos pensalas como obxectos que se comportan localmente como os espazos euclidianos, o que fará que sexa posible desenvolver nelas os conceptos elementais do cálculo diferencial.

1.1. Introdución ás variedades diferenciables

• **1.1.** (*Variedades topolóxicas e variedades diferenciables*)

Unha *variedade topolóxica* de dimensión $n \geq 1$ é un espazo topolóxico Hausdorff que é localmente euclidiano de dimensión n (é dicir, cada punto de M ten unha veciñanza aberta homeomorfa a un aberto de $\mathbb{R}^n$).

Para definir a diferenciabilidade en M necesitaremos pasar localmente a $\mathbb{R}^n$. Isto faise tendo en conta que nunha variedade topolóxica poden considerarse *cartas* (U, φ), cada unha delas formada por un *aberto coordenado* $U \subset M$ e un *sistema de coordenadas* φ, que é un homeomorfismo $\varphi\colon U \to \tilde{U}$, onde $\tilde{U}$ é un aberto en $\mathbb{R}^n$. As correspondentes *funcións coordenadas* son $x^i = r^i \circ \varphi$, onde $r^i\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ é a proxección i-ésima, así que $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$. Se $p \in M$ está en U tamén se di que (U, φ) é unha *carta en p* ou que φ *é un sistema de coordenadas en p*.

Para ter unha boa definición de función diferenciables cómpre que sexa independente das cartas usadas, o que se pode conseguir esixindo unha certa compatibilidade entre elas.

Se (U, φ) e (V, ψ) son dúas cartas sobre M tales que $U \cap V \neq \emptyset$, a aplicación

$$\psi \circ \varphi^{-1} = \psi_{|U \cap V} \circ (\varphi^{-1})_{|\varphi(U \cap V)}\colon \varphi(U \cap V) \longrightarrow \psi(U \cap V)$$

entre subconxuntos abertos de $\mathbb{R}^n$ é un *cambio de cartas* ou *cambio de coordenadas*. Dúas cartas (U, φ) e (V, ψ) sobre M son *compatibles* se $U \cap V = \emptyset$ ou, noutro caso, os cambios de cartas $\psi \circ \varphi^{-1}$ e $\varphi \circ \psi^{-1}$ son aplicacións C^∞. Unha familia de cartas $\mathcal{A}$ sobre a variedade topolóxica M é un *atlas* sobre M se (i) os seus abertos coordenados cobren M e (ii) cada dúas cartas en $\mathcal{A}$ son compatibles.

Un atlas é todo o que se necesita nunha variedade topolóxica para convertela nun obxecto diferenciable. Pode suceder que dous atlas distintos sobre unha variedade topolóxica M den lugar á mesma noción de diferenciabilidade. Isto sucederá se as cartas dos dous atlas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ son compatibles entre elas (é dicir, se $\mathcal{A} \cup \mathcal{B}$ tamén é un atlas sobre M), o que define unha relación de equivalencia no conxunto de tódolos atlas sobre M. Diremos entón que dous atlas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ cumprindo esta propiedade son *equivalentes*. Unha clase de equivalencia $[\mathcal{A}]_\infty$ para esta relación é unha *estrutura diferenciable* sobre M.

Un atlas sobre M é un atlas *completo* se non está contido en ningún outro atlas sobre M. Calquera atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ está contido nun único atlas completo $\mathcal{A}_0$, que é

$$\mathcal{A}_0 = \{(U, \varphi) \text{ carta sobre } M \mid \ (U, \varphi) \text{ e } (U_\alpha, \varphi_\alpha) \text{ son compatibles } \forall\, \alpha \in A\};$$

ademais $\mathcal{A}_0$ é a unión de tódolos atlas da estrutura diferenciable $[\mathcal{A}]_\infty$.

Unha *variedade diferenciable* M de dimensión n é unha variedade topolóxica de dimensión n xunto cunha estrutura diferenciable $[\mathcal{A}]_\infty$ (ou, equivalentemente, cun atlas completo $\mathcal{A}_0$); formalmente, é un par $(M, [\mathcal{A}]_\infty)$, e tamén dicimos que a estrutura diferenciable de M está definida polo atlas $\mathcal{A}$. Un *atlas da* variedade diferenciable M é un atlas calquera na súa estrutura diferenciable, as *cartas de* M son as cartas no seu atlas completo.

• **1.2.** (*Aplicación diferenciable entre variedades diferenciables*)

Sexan M e N dúas variedades diferenciables de dimensións n e n', respectivamente, e $f\colon M \to N$ unha aplicación. Se (U, φ) é unha carta de M, (V, ψ) unha carta de N, e $f(U) \subset V$, a aplicación

$$\psi \circ f \circ \varphi^{-1} \colon \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \longrightarrow \psi(V) \subset \mathbb{R}^{n'}$$

é unha *expresión local* de f (respecto de (U, φ) e (V, ψ)). Se $p \in U$, tamén se di que $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é unha expresión local de f en p.

Diremos que unha aplicación $f\colon M \to N$ entre variedades diferenciables é *diferenciable* se para cada $p \in M$ existe una expresión local $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ de f en p que é unha aplicación C^∞ entre os abertos $\varphi(U)$ e $\psi(V)$, polo que tódalas expresións locais de f son C^∞. A aplicación f é un *difeomorfismo* se é bixectiva e tanto f como f^{-1} son diferenciables. Neste caso dicimos que M é *difeomorfa* a N.

• **1.3.** (*Subvariedades abertas*)

Cada subespazo aberto non baleiro W dunha variedade diferenciable M é unha variedade diferenciable da mesma dimensión que M coa estrutura diferenciable definida por un atlas obtido ao cortar as cartas de M con W e restrinxir os sistemas de coordenadas á intersección con W, é dicir, se $\mathcal{A}$ é un atlas de M entón

$$\mathcal{A}_W = \{(U \cap W,\, \varphi_{|U\cap W}) \mid (U,\varphi) \in \mathcal{A},\ U \cap W \neq \emptyset\}$$

é un atlas que define á estrutura diferenciable da *subvariedade aberta* W de M.

• **1.4.** (*A variedade diferenciable* $\mathbb{R}^n$)

O espazo topolóxico euclidiano $\mathbb{R}^n$ coa estrutura diferenciable definida polo atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\}$ é unha variedade diferenciable de dimensión n, e $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = (r^1, \ldots, r^n)$ é o sistema de coordenadas identidade de $\mathbb{R}^n$, onde as $r^j : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ son as proxeccións canónicas. O atlas completo $\mathcal{A}_0$ de $\mathbb{R}^n$, de acordo coa descrición xeral a partir dun atlas calquera nunha variedade diferenciable en 1.1, é a familia de tódolos pares (U, φ) de abertos U en $\mathbb{R}^m$ con difeomorfismos (C^∞) de U nalgún aberto en $\mathbb{R}^m$.

En particular, cada aberto non baleiro W de $\mathbb{R}^n$ é unha variedade diferenciable de dimensión n, e a súa estrutura diferenciable está definida polo atlas $\mathcal{A}_W = \{(W, \mathrm{id}_W)\}$, e tamén escribimos $\mathrm{id}_W = (r^1, \ldots, r^n)$. Ás veces, tamén poñemos $\mathrm{id}_W = (x^1, \ldots, x^n)$, ou $\mathrm{id}_W = (x, y)$ se W é un aberto en $\mathbb{R}^2$, ou $\mathrm{id}_W = (x, y, z)$ se se trata dun aberto en $\mathbb{R}^3$. Se $n = 1$, tanto $\mathbb{R}$ como calquera aberto $I \subset \mathbb{R}$ son variedades diferenciables de dimensión 1 coa estrutura diferenciable definida polo atlas (I, id_I), onde $\mathrm{id}_I = (r)$.

A diferenciabilidade dunha aplicación entre subvariedades abertas de espazos euclidianos equivale á diferenciabilidade C^∞ no sentido usual entre os correspondentes abertos euclidianos.

• **1.5.** (*Os espazos vectoriais como variedades diferenciables*)

Se F é un espazo vectorial sobre $\mathbb{R}$ de dimensión finita $k \geq 1$, unha base $\{u_1, \ldots, u_k\}$ de F define un isomorfismo $\psi \colon F \to \mathbb{R}^k$ por $\psi(u_i) = e_i$, $i = 1, ..., k$, onde $\{e_1, ..., e_k\}$ é a base canónica de $\mathbb{R}^k$. O isomorfismo ψ permite dotar a F dunha estrutura de variedade diferenciable de dimensión k (difeomorfa a $\mathbb{R}^k$ e que é independente da base de F), para a que (F, ψ) é unha carta e $\{(F, \psi)\}$ é un atlas. Ademais, o sistema de coordenadas (global) ψ de F é $\psi = (z^1, \ldots, z^k)$, onde $\{z^1, \ldots, z^k\}$ é a base dual de $\{u_1, \ldots, u_k\}$.

• **1.6.** (*Variedades produto*)

Sexan M e N variedades diferenciables de dimensións n e n', respectivamente. Se $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ é un atlas de M e $\mathcal{B} = \{(V_i, \psi_i)\}_{i \in I}$ é un atlas de N, entón $\mathcal{A} \star \mathcal{B} = \{(U_\alpha \times V_i, \varphi_\alpha \times \psi_i)\}_{(\alpha,i) \in A \times I}$ é un atlas no espazo topolóxico produto $M \times N$, que é unha variedade topolóxica de dimensión $n + n'$. Coa estrutura diferenciable definida polo atlas $\mathcal{A} \star \mathcal{B}$, este espazo convértese nunha variedade diferenciable, que é a *variedade produto* de M e N.

• **1.7.** (*Os sistemas de coordenadas como difeomorfismos*)

Se M é unha variedade diferenciable de dimensión n, U é un aberto en M, $\tilde{U}$ é un aberto en $\mathbb{R}^n$ e $\varphi\colon U \to \tilde{U}$ é unha aplicación bixectiva entón, de acordo con 1.1 e 1.2, (U, φ) é unha carta (no atlas completo) da variedade diferenciable M se, e só se, φ é un homeomorfismo e os cambios de coordenadas coas cartas dun atlas de M son aplicacións C^∞. Agora ben, dado que U pode considerarse como unha subvariedade aberta de M e $\tilde{U}$ o é de $\mathbb{R}^n$ e toda aplicación diferenciable entre dúas variedades diferenciables é continua tense que (U, φ) é unha carta de M se, e só se, a aplicación bixectiva $\varphi\colon U \to \tilde{U}$ entre variedades diferenciables é un difeomorfismo.

• **1.8.** (*A álxebra $\mathcal{F}(M)$ das funcións reais diferenciables*)

Se $f\colon M \to \mathbb{R}$ e unha aplicación definida nunha variedade diferenciable n-dimensional M, pódense considerar expresión locais de f da forma $f \circ \varphi^{-1}$ para as cartas (U, φ) de M e $(\mathbb{R}, \mathrm{id}_{\mathbb{R}})$ de $\mathbb{R}$ e, de acordo con 1.2, a función $f\colon M \to \mathbb{R}$ é diferenciable se, e só se, para cada $p \in M$ existe unha expresión local $f \circ \varphi^{-1}\colon \varphi(U) \to \mathbb{R}$ de f en $p \in U$ do aberto $\varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$ en $\mathbb{R}$ que é C^∞ e, polo tanto se, e só se, toda expresión local $f \circ \varphi^{-1}$ de f é C^∞.

Posto que a suma, o produto por escalares e o produto de funcións reais diferenciables tamén é unha función diferenciable, o conxunto de tódalas funcións reais diferenciables definidas en M é un anel e un espazo vectorial real. Tamén é unha álxebra sobre $\mathbb{R}$ (asociativa, conmutativa e unitaria), que denotaremos con $\mathcal{F}(M)$.

• **1.9.** (*As curvas diferenciables nunha variedade*)

Unha *curva* nunha variedade diferenciable n-dimensional M é unha aplicación continua $\alpha\colon I \subset \mathbb{R} \to M$, onde I é un intervalo aberto (non necesariamente limitado).

De acordo co observado en 1.4, cada aberto en I, coa identidade, define unha carta da variedade diferenciable $\mathbb{R}$ e da súa subvariedade aberta I. Logo, podemos considerar expresións locais de α da forma $\varphi \circ \alpha\colon \alpha^{-1}(U) \subset I \to \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n$, onde (U, φ) é unha carta de M tal que $\alpha(I) \cap U \neq \emptyset$. Así pois, unha curva $\alpha\colon I \to M$ é diferenciable se, e só se, para todo $t_0 \in I$ existe unha carta (U, φ) de M, con $\alpha(t_0) \in U$, tal que $\varphi \circ \alpha$ é unha aplicación C^∞, ou, equivalentemente, se, e só se, toda expresión local $\varphi \circ \alpha$ de α é C^∞.

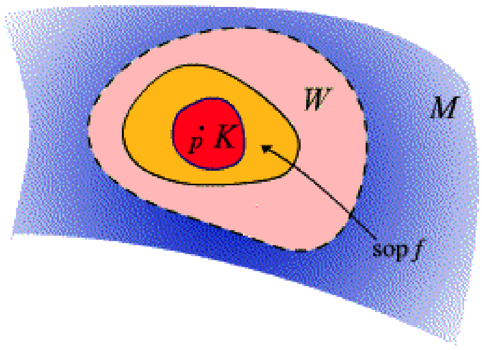
• **1.10.** (*Teorema de existencia de funcións meseta*) Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión n, W un aberto en M e $p \in W$. Entón existe unha veciñanza compacta K de p contida en W e unha función $f \in \mathcal{F}(M)$ coas seguintes propiedades, onde $\operatorname{sop} f = \overline{\{x \in M \mid f(x) \neq 0\}}$,

$0 \leq f(x) \leq 1$ se $x \in M$,

$f(x) = 1$ se $x \in K$,

$\operatorname{sop} f \subset W$,

$\operatorname{sop} f$ é compacto.



• **1.11.** (*Propiedade de extensión local de funcións diferenciables*)

Sexan M unha variedade diferenciable, W un subconxunto aberto de M e $p \in W$. Se $h \in \mathcal{F}(W)$, existe unha veciñanza aberta V de p con clausura compacta $\overline{V} \subset W$ e existe unha función $g \in \mathcal{F}(M)$ tal que $g_{|V} = h_{|V}$ e se anula fóra de W.

1.2. Vectores tanxentes

Para cada punto $p \in \mathbb{R}^n$ pódese definir o espazo tanxente a $\mathbb{R}^n$ en p como o conxunto $\mathbb{R}^n_p = \{(p, v) \mid v \in \mathbb{R}^n\}$, que ten a estrutura dun espazo vectorial de dimensión n. Con esta definición poderíase pensar, por exemplo, o espazo tanxente á esfera unidade $\mathbb{S}^{n-1}$ en $p \in \mathbb{S}^{n-1}$ como o subespazo vectorial de $\mathbb{R}^n_p$ formado por tódolos vectores (p, v) tales que v é perpendicular a p. Unha variedade diferenciable é, non obstante, un obxecto abstracto que non consideramos en xeral dentro dun espazo euclidiano. Cómpre pois requirir dalgunha definición intrínseca de vector tanxente a un punto dunha variedade; a que nós imos considerar é unha definición alxébrica, suxerida pola forma de comportarse da derivada segundo curvas diferenciables na variedade.

Se M é unha variedade diferenciable de dimensión n e $p \in M$ entón

$$C_p(M) = \{\alpha\colon (a, b) \to M \mid -\infty \leq a < 0 < b \leq +\infty,\ \alpha \text{ curva diferenciable, } \alpha(0) = p\}$$

é o conxunto de tódalas curvas diferenciables en M con *punto inicial* p. Cada $\alpha \in C_p(M)$ define unha aplicación

$$\Delta_\alpha\colon \mathcal{F}(M) \longrightarrow \mathbb{R}$$

por

$$\Delta_\alpha(f) = (f \circ \alpha)'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{(f \circ \alpha)(t) - f(p)}{t},$$

que é a *derivada de f en p segundo a curva α*. No caso particular $p \in M = \mathbb{R}^n$ se a curva α describe a recta con punto inicial p na dirección de $v \in \mathbb{R}^n$, é dicir, $\alpha(t) = p + tv$,

$\Delta_\alpha(f) = D_v(f)(p)$ é a derivada de f en p segundo v. A aplicación Δ_α satisfai as seguintes propiedades, para cada $f, g \in \mathcal{F}(M)$ e $a, b \in \mathbb{R}$:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \qquad \Delta_\alpha(af + bg) = a\,\Delta_\alpha(f) + b\,\Delta_\alpha(g), \\ &\text{(b)} \qquad \Delta_\alpha(fg) = \Delta_\alpha(f)\,g(p) + f(p)\,\Delta_\alpha(g), \end{aligned}$$

Isto leva a seguinte definición (véxase Lee [9, p. 54]):

Definición 1.12. Un *vector tanxente* a M nun punto $p \in M$ é unha aplicación linear $v\colon \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ que verifica a seguinte propiedade adicional (polo que tamén se di que é unha *derivación en* p):

$$v(fg) = v(f)\,g(p) + f(p)\,v(g) \qquad f, g \in \mathcal{F}(M).$$

Os vectores tanxentes a M nun punto forman un espazo vectorial real coas operacións:

$$\text{(i) } (v + w)(f) = v(f) + w(f), \qquad \text{(ii) } (\lambda \cdot v)(f) = \lambda\, v(f),$$

onde v e w son vectores tanxentes a M en p, $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in \mathcal{F}(M)$.

A este espazo vectorial chamarémolo *espazo tanxente* a M en p e denotarémolo por $T_p(M)$. En particular, Δ_α pertence a $T_p(M)$ para cada $\alpha \in C_p(M)$.

• **1.13.** (*Comportamento local dos vectores tanxentes*)

As seguintes propiedades, que son consecuencia da propiedade de derivación en p dun vector tanxente $v \in T_p(M)$ e da propiedade de extensión local de funcións diferenciables 1.11, amosan o carácter local dos vectores tanxentes nun punto:

(1) Se $f, g \in \mathcal{F}(M)$ coinciden nunha veciñanza de p entón $v(f) = v(g)$;

(2) se $f \in \mathcal{F}(M)$ é constante nunha veciñanza de p entón $v(f) = 0$.

• **1.14.** (*A aplicación tanxente*)

As aplicacións diferenciables entre espazos euclidianos poden ser aproximadas linearmente nun punto pola diferencial da aplicación nese punto. En xeral, non podemos falar de aplicacións lineares entre variedades diferenciables, pero si entre espazos tanxentes, o que nos vai permitir a definición da diferencial nun punto (que chamaremos aplicación tanxente) dunha aplicación diferenciable entre variedades. Para isto podemos pensar que se consideramos unha aplicación diferenciable $f\colon M \to N$ e un vector tanxente a M en $p \in M$ que é a derivada Δ_α segundo unha curva diferenciable $\alpha \in C_p(M)$, o máis natural é facerlle corresponder o vector tanxente $\Delta_{f\circ\alpha} \in T_{f(p)}(N)$, e que a relación entre as dúas derivacións está dada por $\Delta_{f\circ\alpha}(h) = \Delta_\alpha(h \circ f)$, se $h \in \mathcal{F}(N)$. Isto leva a seguinte definición:

Se M e N son variedades diferenciables e $f\colon M \to N$ é unha aplicación diferenciable, para cada $p \in M$, $q = f(p)$, a *aplicación tanxente a f en p* é a aplicación linear $f_{*p}\colon T_pM \to T_qN$ definida por

$$f_{*p}(v)(h) = v(h \circ f), \qquad v \in T_p(M),\ h \in \mathcal{F}(N).$$

A aplicación tanxente á identidade $\mathrm{id}_M\colon M \to M$ en $p \in M$ é a identidade $\mathrm{id}_{T_p(M)}$, e se $f\colon M \to N$ e $g\colon N \to L$ son aplicacións diferenciables entón $(g \circ f)_{*p} = g_{*f(p)} \circ f_{*p}$ para cada $p \in M$ (isto é, a *regra da cadea*).

Como consecuencia destas propiedades functoriais, tense que se $f\colon M \to N$ é un difeomorfismo entón f_{*p} é un isomorfismo para todo $p \in M$, e $(f^{-1})_{*f(p)} = (f_{*p})^{-1}$.

• **1.15.** (*O espazo tanxente a unha subvariedade aberta*)

Para relacionar o espazo tanxente a unha variedade diferenciable n-dimensional M nun punto $p \in M$ co espazo euclidiano $\mathbb{R}^n$ son especialmente útiles as cartas da variedade no punto p. Unha cuestión técnica que debemos considerar é que, coa nosa definición de vector tanxente nun punto $p \in M$, as funcións diferenciables sobre as que actúa cada vector tanxente $v \in T_p(M)$ están definidas en toda a variedade M, mais os sistemas coordenados están definidos en abertos $U \subset M$. Agora ben, como consecuencia do comportamento local dos vectores tanxentes (1.13), e utilizando a propiedade de extensión local de funcións diferenciables (1.11), tense un isomorfismo canónico:

Se W é unha subvariedade aberta de M e $\boldsymbol{i}\colon W \hookrightarrow M$ é a inclusión, entón, para cada $p \in W$, a aplicación tanxente $\boldsymbol{i}_{*p}\colon T_p(W) \to T_p(M)$ é un isomorfismo de espazos vectoriais.

Con este isomorfismo identificamos $T_p(W)$ e $T_p(M)$ para cada $p \in W$, o que significa que cada vector tanxente $v \in T_p(W)$ é a mesma derivación en p que $\boldsymbol{i}_{*p}(v) \in T_p(M)$, unha actuando sobre funcións en W e a outra sobre funcións en M. Isto resulta obvio, xa que unha derivación en p só depende dos valores dás funcións nunha veciñanza de p tan pequena como se queira, polo que calquera vector tanxente $v \in T_p(M)$ poderá aplicarse, sen ningunha imprecisión, a funcións definidas en calquera veciñanza aberta de p.

• **1.16.** (*Unha base para o espazo tanxente nun punto*)

Se (U, φ) é unha carta dunha variedade diferenciable M de dimensión n, con funcións coordenadas $x^1, \ldots, x^n$, para cada función diferenciable real f definida nunha veciñanza dun punto $p \in U$ denotamos

$$\left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p = D_i(f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big), \qquad i \in \{1, \ldots, n\},$$

e chamamos $\left(\partial_{x^i}\right)_p$ á aplicación $\left(\partial_{x^i}\right)_p\colon \mathcal{F}(M) \to \mathbb{R}$ definida por

$$\left(\partial_{x^i}\right)_p(f) = \left(\frac{\partial f}{\partial x^i}\right)_p.$$

Consideramos a aplicación

$$h_p^\varphi\colon \mathbb{R}^n \longrightarrow T_p(M),$$

dada, para cada $a \in \mathbb{R}^n$, por

$$h_p^\varphi(a)(f) = d(f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big)(a), \qquad f \in \mathcal{F}(M).$$

En particular, para os elementos $e_1, \dots, e_n$ da base canónica de $\mathbb{R}^n$ tense

$$h_p^\varphi(e_i)(f) = D_i(f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big) = \left(\partial_{x^i}\right)_p(f),$$

para todo $f \in \mathcal{F}(M)$, é dicir, para cada $i = 1, \dots, n$, $\left(\partial_{x^i}\right)_p = h_p^\varphi(e_i)$ e é un vector tanxente a M en p. É fácil ver que os vectores $\left(\partial_{x^1}\right)_p, \dots, \left(\partial_{x^n}\right)_p$ de $T_p(M)$ son linearmente independentes, así que h_p^φ é inxectiva; tamén se verifica que cada $v \in T_p(M)$ se pode escribir

$$v = \sum_{i=1}^n v(x^i)\left(\partial_{x^i}\right)_p,$$

do que se pode ver unha proba directa en Matsushima [10]. En resumo,

A aplicación $h_p^\varphi\colon \mathbb{R}^n \to T_p(M)$ é un isomorfismo de espazos vectoriais, logo o espazo vectorial real $T_p(M)$ ten dimensión n. Ademais $\{\left(\partial_{x^1}\right)_p, \dots, \left(\partial_{x^n}\right)_p\}$ é unha base de $T_p(M)$.

• **1.17.** (*A aplicación tanxente en coordenadas*)

Se $f\colon M \to N$ é unha aplicación diferenciable entre variedades diferenciables de dimensións m e n, respectivamente, a aplicación tanxente $f_{*p}\colon T_p(M) \to T_q(N)$ nun punto $p \in M$, con $q = f(p)$, pode representarse en termos da matriz jacobiana dunha expresión local de f en p. Se (U, φ) e (V, ψ) son cartas de M e N en p e q, respectivamente, $\varphi = (x^1, \dots, x^m)$, $\psi = (y^1, \dots, y^n)$, tales que $f(U) \subset V$, para cada $i = 1, \dots, m$, tense

$$f_{*p}\left(\partial_{x^i}\right)_p = \sum_{j=1}^n \left(\frac{\partial(y^j \circ f)}{\partial x^i}\right)_p \left(\partial_{y^j}\right)_q = \sum_{j=1}^n D_i(y^j \circ f \circ \varphi^{-1})\big(\varphi(p)\big)\left(\partial_{y^j}\right)_q,$$

así que, con respecto ás bases $\{(\partial_{x^i})_p \mid i = 1, \dots, m\}$ de $T_p(M)$ e $\{(\partial_{y^j})_q \mid j = 1, \dots, n\}$ de $T_q(N)$, a matriz de f_{*p} é a matriz jacobiana $D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p))$ da expresión local $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ en $\varphi(p)$.

• **1.18.** (*O rango dunha aplicación diferenciable nun punto*)

Se M e N son variedades diferenciables $f\colon M \to N$ unha aplicación diferenciable e p un punto de M, o *rango* de f en p defínese como

$$\operatorname{rang}_p(f) := \operatorname{rang}(f_{*p}) = \operatorname{rang} D(\psi \circ f \circ \varphi^{-1})(\varphi(p)),$$

onde $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é unha expresión local de f en p.

1.3. Difeomorfismos locais, inmersións e submersións

Sexa $f\colon M \to N$ unha aplicación diferenciable entre variedades diferenciables e p un punto de M.

(a) A aplicación f é un *difeomorfismo local* en p se existe unha veciñanza aberta U de p e unha veciñanza aberta V de $f(p)$ tal que $f_{|U}\colon U \to V$ é un difeomorfismo. Polo teorema da función inversa, isto equivale a que $f_{*p}\colon T_p(M) \to T_{f(p)}(N)$ sexa un isomorfismo, e a que f teña unha expresión local en p que é a identidade nun aberto euclidiano.

(b) f é unha *inmersión* en p se f_{*p} é inxectiva, o que equivale a que f teña unha expresión local en p que é a inclusión nun produto de abertos euclidianos.

(c) f é unha *submersión* en p se f_{*p} é sobrexectiva, o que equivale a que f teña unha expresión local en p que é a proxección dun produto de abertos euclidianos nun deles.

A aplicación f é unha *inmersión* se é unha inmersión en cada punto de M, e é unha *submersión* se é unha submersión en cada punto de M.

Un *embebemento regular* é unha inmersión $f\colon M \to N$ que tamén é un embebemento (é dicir, f é inxectiva e define un homeomorfismo de M en $f(M)$).

Observación 1.19. Se M e M' son variedades diferenciables e $M \times M'$ é a variedade produto de M e M', tense:

(1) As proxeccións $\pi : M \times M' \to M$ e $\pi' : M \times M' \to M'$ son submersións.

(2) Se $p \in M$, $q \in N$, as aplicacións $i_q : M \to M \times M'$ e $j_p : M' \to M \times M'$, dadas por $i_q(x) = (x, q)$ e $j_p(y) = (p, y)$, son embebementos regulares.

• **1.20.** (*Subvariedades regulares*)

Se M e S son variedades diferenciables tales que $S \subset M$ e a inclusión $\boldsymbol{i}\colon S \hookrightarrow M$ é una inmersión, dise que S é una *subvariedade* de M; se, ademais, S é un subespazo topolóxico de M, S é unha *subvariedade regular* de M. Neste caso, para cada $p \in S$, dise que $\boldsymbol{i}_{*p}(T_p(S))$ é o *subespazo de $T_p(M)$ tanxente a S*.

A caracterización local das inmersión como unha inclusión nun produto permite obter o seguinte *lema de factorización* de aplicacións diferenciables a través de subvariedades regulares:

Sexan L e M variedades diferenciables e S unha subvariedade regular de M. Sexa $g\colon L \to M$ unha aplicación tal que $g(L) \subset S$, e $g_0\colon L \to S$ dada por $g_0(x) = g(x)$ para todo $x \in L$. Entón g é diferenciable se, e só se, g_0 o é.

$$
\begin{tikzcd}
L \arrow[r, "g"] \arrow[dr, "g_o"'] & M \\
& S \arrow[u, "\boldsymbol{i}"']
\end{tikzcd}
$$

Como consecuencia do lema de factorización séguese que se S é un subespazo topolóxico dunha variedade diferenciable M entón existe ao sumo unha estrutura diferenciable en S coa que S é unha subvariedade regular de M.

Exemplo 1.21. (*A esfera* $\mathbb{S}^n$)

Considérase o subespazo $\mathbb{S}^n = \{x = (x_1, \ldots, x_{n+1}) \in \mathbb{R}^{n+1} \mid \|x\| = 1\}$ de $\mathbb{R}^{n+1}$ coa estrutura diferenciable definida polo atlas $\mathcal{A} = \{(U_j^+, \varphi_j^+), (U_j^-, \varphi_j^-) \bigm| j = 1, \ldots, m+1\}$, onde

$$
U_j^+ = \{x \in \mathbb{S}^n \mid x_j > 0\}, \qquad U_j^- = \{x \in \mathbb{S}^n \mid x_j < 0\},
$$

e φ_j^+ e φ_j^- son os homeomorfismos definidos en U_j^+ e U_j^-, respectivamente, con valores na bóla aberta unidade n-dimensional $\mathbb{B}^n = \{(t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n \mid t_1^2 + \cdots + t_n^2 < 1\} \subset \mathbb{R}^n$, dados por

$$
\begin{array}{rcl}
\varphi_j^\pm\colon U_j^\pm & \longrightarrow & \mathbb{B}^n \\
(x_1, \ldots, x_{n+1}) & \longmapsto & (x_1, \ldots, \widehat{x_j}, \ldots, x_{n+1}),
\end{array}
$$

onde $\widehat{x_j}$ indica que se omite x_j. Desta forma, a esfera n-dimensional $\mathbb{S}^n$ coa estrutura diferenciable $[\mathcal{A}]_\infty$, convértese nunha variedade diferenciable de dimensión n.

Ademais, a inclusión $\boldsymbol{i}\colon \mathbb{S}^n \to \mathbb{R}^{n+1}$ é unha inmersión, logo $\mathbb{S}^n$ é unha subvariedade regular de $\mathbb{R}^{n+1}$ e $[\mathcal{A}]_\infty$ é a única estrutura diferenciable sobre $\mathbb{S}^n$ coa que o é.

• **1.22.** (*Submersións e variedades cocientes*)

Da caracterización local das submersións séguese que as submersións son aplicacións abertas. Tamén se segue o resultado que imos enunciar, especialmente útil para o estudo da diferenciabilidade de aplicacións definidas nunha *variedade cociente* dunha variedade diferenciable M. (Esta é, esencialmente, unha variedade diferenciable que é a imaxe dunha submersión definida en M; a súa topoloxía é a topoloxía cociente de M, xa que toda submersión sobrexectiva, ao ser continua e aberta, é unha identificación). Tense:

Se M, N e L son variedades diferenciables e $f\colon M \to N$ é unha submersión sobrexectiva, unha aplicación $g\colon N \to L$ é diferenciable se, e só se, tamén o é $g \circ f$.

$$\begin{tikzcd} M \arrow[r, "g \circ f"] \arrow[d, "f"'] & L \\ N \arrow[ur, "g"'] & \end{tikzcd}$$

• **1.23.** (*O teorema do valor regular*)

Se M e N son variedades diferenciables de dimensións m e n, respectivamente, e $f\colon M \to N$ é diferenciable, un punto $q \in N$ dise un *valor regular* de f se para cada $p \in M$ tal que $f(p) = q$, f é unha submersión en p (é dicir, p é un *punto regular*). Como consecuencia da caracterización local das submersións dedúcese que se q é un valor regular de f entón $S = f^{-1}(q)$ é unha subvariedade regular de M de dimensión $m - n$ (*teorema do valor regular*); ademais, para cada $p \in S$, o subespazo de $T_p(M)$ tanxente a S é $\ker f_{*p}$, é dicir, $\boldsymbol{i}_{*p}(T_p(S)) = \ker f_{*p}$ (onde $\boldsymbol{i}\colon S \to M$ é a inclusión).

Exemplo 1.24. A aplicación $f\colon \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ dada por $f(x) = \|x\|^2$ é diferenciable e cada $q \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$ é un valor regular de f. Así, pódese tamén obter, polo teorema do valor regular, que a esfera $\mathbb{S}^n = f^{-1}(1)$ é unha subvariedade regular de $\mathbb{R}^{n+1}$ de dimensión n e, para cada $p = (p_1, \ldots, p_{n+1}) \in \mathbb{S}^n$, o subespazo de $T_p(\mathbb{R}^{n+1})$ tanxente a $\mathbb{S}^n$ é

$$\boldsymbol{i}_{*p}\big(T_p(\mathbb{S}^n)\big) = \mathrm{Ker}(f_{*p}) = \left\{ v = \sum_{i=1}^{n+1} a_i \big(\partial_{r^i}\big)_p \in T_p(\mathbb{R}^{n+1}) \;\middle|\; \langle p, a \rangle = 0 \right\},$$

onde $\langle p, a\rangle = \sum_{i=1}^{n+1} p_i a_i$ é o produto escalar euclidiano de p e a en $\mathbb{R}^{n+1}$. Ademais, pola unicidade dunha estrutura diferenciable nunha subvariedade regular de $\mathbb{R}^{n+1}$, a estrutura diferenciable herdada da variedade euclidiana coincide coa dada no exemplo 1.21.

Capítulo 2

Fibrados vectoriais e campos de vectores

Dada unha variedade diferenciable M, con frecuencia ten interese considerar para cada punto $p \in M$ un espazo vectorial asociado E_p, como pode ser o espazo tanxente $T_p(M)$, o seu espazo dual $T_p^*(M)$, espazos vectoriais de aplicacións lineares ou multilineares como os espazos de tensores construídos a partir dun espazo tanxente e o seu dual, subespazos de espazos de tensores $T_p^*(M) \otimes \cdots \otimes T_p^*(M)$ como os de aplicacións multilineares antisimétricas (formas lineares) e sumas directas dalgúns espazos vectoriais asociados ao punto. En cada caso, tódolos espazos vectoriais E_p son isomorfos a un certo espazo vectorial F, pero cada espazo E_p depende soamente do punto p, é dicir, non hai un isomorfismo natural entre os espazos vectoriais E_p e E_q para puntos distintos $p, q \in M$. Se se considera o conxunto unión $E = \bigcup_{p \in E} E_p$, hai unha proxección natural $\pi \colon E \to M$ de xeito que dado $p \in M$ tense $\pi^{-1}(p) = E_p$, e hai unha veciñanza aberta U tal que $\pi^{-1}(U)$ pode identificarse con $U \times F$ e a aplicación $\pi_{|\pi^{-1}(U)} \colon \pi^{-1}(U) \to U$ coa proxección $U \times F \to U$, así que $\pi^{-1}(U)$ é como a variedade produto $U \times F$. Se os distintos conxuntos $\pi^{-1}(U)$ así obtidos poden pegarse coherentemente (como na condición (3) do teorema 2.6), entón o conxunto E ten unha topoloxía e unha estrutura diferenciable coas que (E, π, M, F) é o que se chama un espazo fibrado vectorial sobre M.

2.1. Espazos fibrados vectoriais

Definición 2.1. Sexan M e E variedades diferenciables, $\pi \colon E \to M$ unha aplicación diferenciable e F un espazo vectorial real de dimensión finita, e supoñamos que $E_x = \pi^{-1}(\{x\})$ é un espazo vectorial real para todo $x \in M$. O cuádruplo $\xi = (E, \pi, M, F)$ dise que é un *espazo fibrado vectorial* se (i) para todo $p \in M$, existe unha veciñanza aberta U de p e un difeomorfismo $h\colon U \times F \to \pi^{-1}(U)$ tal que o diagrama

$$\begin{tikzcd} U \times F \arrow[rr, "h"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(U) \arrow[dl, "\pi"] \\ & U & \end{tikzcd}$$

conmuta, e ademais (ii) para todo $x \in U$, a aplicación

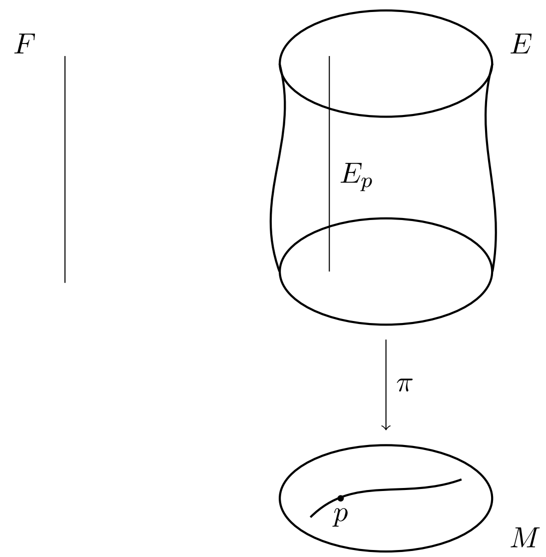
$$\begin{aligned} h_x\colon F &\longrightarrow E_x \\ z &\longmapsto h_x(z) = h(x, z) \end{aligned}$$

é un isomorfismo de espazos vectoriais, é dicir, para cada $x \in U$, $z_1, z_2 \in F$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$,

$$\text{(i) } (\pi \circ h)(x, z) = x, \qquad \text{(ii) } h(x, \lambda z_1 + \mu z_2) = \lambda h(x, z_1) + \mu h(x, z_2).$$

Se $\dim(F) = k$, diremos que ξ é un espazo fibrado vectorial de *rango* k.

Definición 2.2. Se $\xi = (E, \pi, M, F)$ é un espazo fibrado vectorial, dise que E é o *espazo total*, M o *espazo base*, π a *proxección* do fibrado e F a *fibra típica*. Para cada $p \in M$, o conxunto $E_p = \pi^{-1}(\{p\})$ é a *fibra* sobre p. Tamén se di que ξ (ou o espazo total E) é un *fibrado vectorial sobre M con fibra F*.



Definición 2.3. A aplicación $h\colon U \times F \to \pi^{-1}(U)$ na definición 2.1 dise que é unha trivialización, o aberto U un *aberto de trivialidade* e o par (U, h) unha *carta fibrada vectorial*. Unha familia de cartas fibradas vectoriais $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in A}$, onde $\{U_\alpha\}_{\alpha \in A}$ é unha cobertura de M, dise que é un *atlas fibrado vectorial*.

Exemplo 2.4. (*Fibrado vectorial produto*)

Sexa M unha variedade diferenciable e F un espazo vectorial real de dimensión k. Entón $\mu_M^F = (M \times F, \mathrm{pr}_1, M, F)$ é un espazo fibrado vectorial, que se chama o *fibrado vectorial produto* ou *trivial* sobre M con fibra F. Para cada $p \in M$, o conxunto $\{p\} \times F \subset M \times F$ ten unha estrutura de espazo vectorial real tal que $(p, z) \in \{p\} \times F \mapsto z \in F$ é un isomorfismo, é dicir,

$$a(p, z) + b(p, z') = (p, az + bz'), \qquad p \in M, \;\; z, z' \in F, \;\; a, b \in \mathbb{R}.$$

Tense que $(M, \mathrm{id}_{M\times F})$ é unha carta fibrada vectorial e $\{(M, \mathrm{id}_{M\times F})\}$ é un atlas fibrado vectorial de μ_M^F.

Proposición 2.5. *Sexa $\xi = (E, \pi, M, F)$ un espazo fibrado vectorial. Entón a proxección $\pi\colon E \to M$ é unha submersión, cada fibra E_p é unha subvariedade regular de E e se $p \in U$ (onde (U, h) é unha carta fibrada vectorial de ξ), o isomorfismo*

$$h_p\colon z \in F \longmapsto h_p(z) = h(p, z) \in E_p$$

tamén é un difeomorfismo.

Demostración. Se (U, h) é unha carta fibrada entón $\pi_{|\pi^{-1}(U)} = \mathrm{pr}_1 \circ h^{-1}$ é unha composición de un difeomorfismo e unha submersión, logo é unha submersión. Por tanto π é unha submersión en cada punto de E. Polo teorema do valor regular, cada fibra $E_p = \pi^{-1}(p)$ é unha subvariedade regular de E. Se $p \in U$, a aplicación $h_p\colon F \to E_p$ é diferenciable, xa que a composición

$$z \in F \mapsto (p, z) \in U \times F \mapsto h_p(z) = h(p, z) \in E_p \hookrightarrow \pi^{-1}(U) \hookrightarrow E$$

é diferenciable e toma valores na subvariedade regular E_p de E. A súa inversa h_p^{-1} pódese tamén escribir como composición de aplicacións diferenciables

$$y \in E_p \hookrightarrow \pi^{-1}(U) \mapsto h^{-1}(y) \in U \times F \mapsto \mathrm{pr}_2\, h^{-1}(y) \in F.$$

Así, h_p é un difeomorfismo. □

Teorema 2.6. *Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión n, F un espazo vectorial de dimensión k, E un conxunto e $\pi\colon E \to M$ unha aplicación sobrexectiva tal que para cada $x \in M$, o conxunto $E_x = \pi^{-1}(\{x\})$ é un espazo vectorial. Supoñamos que existe unha cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M e unha familia $\{h_\alpha\colon U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ de aplicacións bixectivas tales que se verifican as seguintes propiedades:*

(1) $(\pi \circ h_\alpha)(x,z) = x$ *para todo* $x \in U_\alpha$, $z \in F$, $\alpha \in A$.

(2) $h_\alpha(x, az + a'z') = ah_a\alpha(x,z) + a'h_\alpha(x,z')$, *para* $x \in U_\alpha$, $z, z' \in F$, $a, a' \in \mathbb{R}$, $\alpha \in A$.

(3) *Para cada* $\alpha, \beta \in A$, $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, *a aplicación*

$$h_\beta^{-1} \circ h_\alpha \colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$$

é diferenciable (e por tanto é un difeomorfismo).

Entón existe unha única estrutura de variedade diferenciable en E *tal que* $\xi = (E, \pi, M, F)$ *é un espazo fibrado vectorial (de rango* k*) e* $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ *é un atlas fibrado vectorial de* ξ.

Demostración. En primeiro lugar imos converter E nun espazo topolóxico, para o que comprobaremos que a familia de conxuntos

$$\mathcal{B} = \big\{ V \subset \pi^{-1}(U_\alpha) \;\big|\; h_\alpha^{-1}(V) \text{ é aberto en } U_\alpha \times F, \alpha \in A \big\}$$

é unha base dunha topoloxía no conxunto E. É dicir, imos ver que se verifica:

(*a*) $E = \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V$,

(*b*) se $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$, para cada $y \in V_1 \cap V_2$ existe $V_3 \in \mathcal{B}$ tal que $y \in V_3 \subset V_1 \cap V_2$.

A condición (*a*) séguese de

$$E = \pi^{-1}(M) = \pi^{-1}\Big(\bigcup_{\alpha \in A} U_\alpha \Big) = \bigcup_{\alpha \in A} \pi^{-1}(U_\alpha) \subset \bigcup_{V \in \mathcal{B}} V,$$

xa que cada $\pi^{-1}(U_\alpha)$ está en $\mathcal{B}$, dado que $h_\alpha^{-1}(\pi^{-1}(U_\alpha)) = U_\alpha \times F$ é aberto en $U_\alpha \times F$. A outra inclusión é trivial. Para comprobar a condición (*b*), sexa $y \in V_1 \cap V_2$, onde $V_1, V_2 \in \mathcal{B}$ son tales que $V_1 \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$, $V_2 \subset \pi^{-1}(U_\beta)$, e tomamos $V_3 = V_1 \cap V_2$. Posto que $V_3 \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$, abonda ver que $h_\alpha^{-1}(V_3)$ é aberto en $U_\alpha \times F$. Agora, $h_\alpha^{-1}(V_1)$ é aberto en $U_\alpha \times F$ e $h_\beta^{-1}(V_2)$ é aberto en $U_\beta \times F$. Ademais, $V_3 \subset \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)$, e polo tanto

$$h_\alpha^{-1}(V_3) = h_\alpha^{-1}\big(V_1 \cap V_2 \cap \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)\big) = h_\alpha^{-1}(V_1) \cap h_\alpha^{-1}\big(V_2 \cap \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)\big),$$

que é aberto en $U_\alpha \times F$, pois $h_\alpha^{-1}(V_1)$ éo, e ademais

$$\begin{aligned} h_\alpha^{-1}\big(V_2 \cap \pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta)\big) &= (h_\alpha^{-1} \circ h_\beta)\big(h_\beta^{-1}(V_2) \cap h_\beta^{-1}(\pi^{-1}(U_\alpha \cap U_\beta))\big) \\ &= (h_\beta^{-1} \circ h_\alpha)^{-1}\big(h_\beta^{-1}(V_2) \cap ((U_\alpha \cap U_\beta) \times F)\big), \end{aligned}$$

é aberto en $(U_\alpha \cap U_\beta) \times F$ (logo en $U_\alpha \times F$) porque $h_\beta^{-1}(V_2) \cap ((U_\alpha \cap U_\beta) \times F)$ tamén o é e $h_\beta^{-1} \circ h_\alpha$ é una aplicación continua pola condición (3) do enunciado.

Consideramos E como espazo topolóxico coa topoloxía xerada pola base $\mathcal{B}$. En particular, para cada $\alpha \in A$, $\pi^{-1}(U_\alpha)$ é un subespazo aberto de E, xa que é o aberto básico $h_\alpha^{-1}(U_\alpha \times F)$. Cada aplicación $h_\alpha \colon U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ é un homeomorfismo, pois ademais de ser bixectiva, é trivialmente aberta e é continua (se $V \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$ é un aberto básico da topoloxía relativa de $\pi^{-1}(U_\alpha)$ definida pola base $\mathcal{B}$ da topoloxía de E, entón $h_\beta^{-1}(V)$ é aberto en $U_\beta \times F$ para algún $\beta \in A$ e polo tanto $(h_\beta^{-1} \circ h_\alpha)^{-1}(h_\beta^{-1}(V)) = h_\alpha^{-1}(V)$ tamén é aberto en $(U_\alpha \cap U_\beta) \times F$, logo en $U_\alpha \times F$).

A aplicación $\pi \colon E \to M$ é continua, xa que o é a súa restrición a cada aberto na cobertura $\{\pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ de E, pois como consecuencia da conmutatividade de cada diagrama

$$(\star) \qquad \begin{tikzcd} U_\alpha \times F \arrow[rr, "h_\alpha"] \arrow[dr, "\mathrm{pr}_1"'] & & \pi^{-1}(U_\alpha) \arrow[dl, "\pi_{|\pi^{-1}(U_\alpha)}"] \\ & U_\alpha & \end{tikzcd}$$

pola condición (1) da hipótese, $\pi_{|\pi^{-1}(U_\alpha)} = \mathrm{pr}_1 \circ h_\alpha^{-1}$.

Para comprobar que E é un espazo Hausdorff consideramos $y, y' \in E$, $y \neq y'$. Supoñemos en primeiro lugar que $\pi(y) \neq \pi(y')$. Como M é Hausdorff existen veciñanzas abertas disxuntas U e U' de $\pi(y)$ e de $\pi(y')$, respectivamente, e dado que π é continua, $\pi^{-1}(U)$ e $\pi^{-1}(U')$ son veciñanzas abertas disxuntas de y e y', respectivamente. Agora, se $\pi(y) = \pi(y') = x$, escollemos $\alpha \in A$ tal que $x \in U_\alpha$ e consideramos o homeomorfismo $h_\alpha \colon U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$. Posto que $y, y' \in \pi^{-1}(U_\alpha)$, $y \neq y'$, os puntos $h_\alpha^{-1}(y)$ e $h_\alpha^{-1}(y')$ de $U_\alpha \times F$ son distintos, logo teñen veciñanzas abertas disxuntas en $U_\alpha \times F$, así é que as súas imaxes por h_α son veciñanzas abertas disxuntas de y e y' en E.

Ademais, E é a unión da familia de abertos $\{\pi^{-1}(U_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ e cada $\pi^{-1}(U_\alpha)$ é homeomorfo a $U_\alpha \times F$, que é unha subvariedade aberta de $M \times F$, e polo tanto E é un espazo topolóxico localmente euclidiano de dimensión $n+k$, é dicir, E é unha variedade topolóxica de dimensión $n+k$.

Para ver que E admite unha estrutura diferenciable imos obter un atlas sobre E. Para isto consideramos un atlas $\{(V_i, \varphi_i)\}_{i \in I}$ da variedade diferenciable M e o sistema de coordenadas $\psi = (z^1, \dots, z^k)$ de F definido por unha base $\{u_1, \dots, u_k\}$ de F, é dicir, $\{z^1, \dots, z^k\}$ é a base dual de $\{u_1, \dots, u_k\}$, e o isomorfismo $\psi \colon F \to \mathbb{R}^k$ é un difeomorfismo.

Para cada $\alpha \in A$, $i \in I$, con $U_\alpha \cap V_i \neq \emptyset$, poñemos $W_{\alpha,i} = U_\alpha \cap V_i$, que é un aberto en M, polo que $\pi^{-1}(W_{\alpha,i})$ é un aberto en E. Denotamos por $\tilde{\varphi}_{\alpha,i}$ a composición de homeomorfismos

$$\pi^{-1}(W_{\alpha,i}) \xrightarrow{h_\alpha^{-1}{}_{|\pi^{-1}(W_{\alpha,i})}} W_{\alpha,i} \times F \xrightarrow{\varphi_{i|W_{\alpha,i}} \times \psi} \varphi_i(W_{\alpha,i}) \times \mathbb{R}^k,$$

que é un homeomorfismo dun aberto de E a un aberto de $\mathbb{R}^{n+k}$. A familia

$$\widetilde{\mathcal{a}} = \big\{ \big(\pi^{-1}(W_{\alpha,i}), \tilde{\varphi}_{\alpha,i}\big) \;\big|\; (\alpha, i) \in A \times I, U_\alpha \cap V_i \neq \emptyset \big\}$$

é un atlas sobre E, xa que:

(i) Os abertos coordenados $\pi^{-1}(W_{\alpha,i})$ das cartas en $\widetilde{\mathcal{a}}$ forman unha cobertura de E, pois se $y \in E$ entón $\pi(y) \in M$ e polo tanto existen $\alpha \in A$ tal que $\pi(y) \in U_\alpha$ e $i \in I$ tal que $\pi(y) \in V_i$, logo $y \in \pi^{-1}(W_{\alpha,i})$.

(ii) Se (α, i) e (β, j) son tales que $\pi^{-1}(W_{\alpha,i}) \cap \pi^{-1}(W_{\beta,j}) \neq \emptyset$, a aplicación

$$\begin{aligned} \tilde{\varphi}_{\beta,j} \circ \tilde{\varphi}_{\alpha,i}^{-1} \colon \tilde{\varphi}_{\alpha,i}\big(\pi^{-1}(W_{\alpha,i} \cap W_{\beta,j})\big) = \varphi_i(W_{\alpha,i} \cap W_{\beta,j}) \times \mathbb{R}^k \longrightarrow \\ \tilde{\varphi}_{\beta,j}\big(\pi^{-1}(W_{\alpha,i} \cap W_{\beta,j})\big) = \varphi_j(W_{\alpha,i} \cap W_{\alpha,j}) \times \mathbb{R}^k \end{aligned}$$

é diferenciable, xa que se pode escribir como a restrición a un aberto en $\mathbb{R}^{n+k}$ dunha composición de aplicacións diferenciables:

$$\big(\varphi_{j|W_{\beta,j}} \times \psi\big) \circ \big(h_\beta^{-1} \circ h_\alpha\big) \circ \big(\varphi_{i|W_{\alpha,i}} \times \psi\big)^{-1},$$

onde tamén utilizamos a condición (3) da hipótese. Así, a variedade topolóxica E, coa estrutura diferenciable definida polo atlas $\widetilde{\mathcal{a}}$ é unha variedade diferenciable de dimensión $n + k$.

Ademais, para cada $\alpha \in A$, o homeomorfismo $h_\alpha \colon U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ é un difeomorfismo. Para comprobalo, abonda ver que para todo $i \in I$ tal que $U_\alpha \cap V_i \neq \emptyset$ tense que $h_{\alpha|W_{\alpha,i} \times F}$ e $h_\alpha^{-1}{}_{|\pi^{-1}(W_{\alpha,i})}$ son diferenciables, o que se segue de que as súas lecturas en coordenadas

$$\begin{tikzcd} (U_\alpha \cap V_i) \times F \arrow[r, "h_{\alpha|W_{\alpha,i} \times F}"] \arrow[d, "\varphi_{i|W_{\alpha,i}} \times \psi"'] & \pi^{-1}(W_{\alpha,i}) \arrow[d, "\tilde{\varphi}_{\alpha,i}"] \\ \varphi_i(U_\alpha \cap V_i) \times \mathbb{R}^k \arrow[r, "\mathrm{id}"'] & \varphi_i(U_\alpha \cap V_i) \times \mathbb{R}^k \end{tikzcd}$$

son C^∞ pois son a identidade nun aberto de $\mathbb{R}^{n+k}$. A aplicación $\pi \colon E \to M$ é diferenciable, porque para cada $\alpha \in A$ é $\pi_{|\pi^{-1}(U_\alpha)} = \mathrm{pr}_1 \circ h_\alpha$ (a conmutatividade do diagrama $(\star)$), e cada (U_α, h_α) é una carta fibrada vectorial polas condiciones (1) e (2) da hipótese. Por conseguinte, (E, π, M, F) é un espazo fibrado vectorial de rango k.

Finalmente debemos ver que a topoloxía e a estrutura diferenciable de E son as únicas para as que $\xi = (E, \pi, M, F)$ é un espazo fibrado vectorial e $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ é un atlas fibrado vectorial de ξ.

1º) Unicidade da topoloxía de E:

Sexa τ a topoloxía de E xerada pola base $\mathcal{B}$ e sexa τ' outra topoloxía en E. Daquela $\tau \subset \tau'$ xa que $\mathcal{B} \subset \tau'$, pois se $V \in \mathcal{B}$ entón existe algún $\alpha \in A$ tal que $V \subset \pi^{-1}(U_\alpha)$ e $h_\alpha^{-1}(V)$ é aberto en $U_\alpha \times F$, logo V é aberto no subespazo (aberto por ser $\pi\colon (E,\tau') \to M$ continua) $\pi^{-1}(U_\alpha)$ de (E,τ'), logo $V \in \tau'$. Tamén $\tau' \subset \tau$ xa que se $W \in \tau'$ entón $W \cap \pi^{-1}(U_\alpha)$ é aberto no subespazo aberto $\pi^{-1}(U_\alpha)$ de (E,τ') para todo $\alpha \in A$, logo $h_\alpha^{-1}(W \cap \pi^{-1}(U_\alpha))$ é aberto en $U_\alpha \times F$ para todo $\alpha \in A$, así $W \cap \pi^{-1}(U_\alpha) \in \mathcal{B}$ para todo $\alpha \in A$, do que se segue que $W = \bigcup_{\alpha\in A}(W \cap \pi^{-1}(U_\alpha)) \in \tau$.

2º) Unicidade da estrutura diferenciable de E:

Sexa $\mathcal{A}'$ outro atlas sobre E que define unha estrutura diferenciable tal que para cada $\alpha \in A$, $h_\alpha\colon U_\alpha \times F \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ é unha trivialización. Para ver que as estruturas diferenciables definidas por $\widetilde{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{A}'$ coinciden debemos ver que os dous atlas son compatibles, é dicir, se $\big(\pi^{-1}(W_{\alpha,i}), \tilde\varphi_{\alpha,i}\big)$ e (W',χ) son cartas de $\widetilde{\mathcal{A}}$ e $\mathcal{A}'$, respectivamente, tales que os seus dominios se cortan, entón os cambios de cartas $\chi \circ \tilde\varphi_{\alpha,i}^{-1}$ e $\tilde\varphi_{\alpha,i} \circ \chi^{-1}$ deben ser C^∞. Agora ben,

$$\chi \circ \tilde\varphi_{\alpha,i}^{-1} = \chi \circ h_\alpha \circ \big((\varphi_{i|W_{\alpha,i}} \times \psi)^{-1}\big)_{|\tilde\varphi_{\alpha,i}\left(\pi^{-1}(W_{\alpha,i}) \cap W'\right)}$$

e

$$\tilde\varphi_{\alpha,i} \circ \chi^{-1} = \big(\varphi_{i|W_{\alpha,i}} \times \psi\big) \circ h_\alpha^{-1} \circ \big(\chi^{-1}\big)_{|\chi\left(\pi^{-1}(W_{\alpha,i}) \cap W'\right)}$$

son diferenciables por selo h_α e h_α^{-1}, respectivamente. □

Corolario 2.7. *Sexa M unha variedade diferenciable, F un espazo vectorial real de dimensión finita e supoñamos que existe unha cobertura aberta $\{U_\alpha\}_{\alpha\in A}$ de M e que para cada $p \in M$ se ten un espazo vectorial E_p xunto con isomorfismos $(h_\alpha)_p\colon F \to E_p$, $p \in U_\alpha$, tal que se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a aplicación*

$$\begin{aligned} h_{\beta\alpha}\colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times F &\longrightarrow F \\ (p,z) &\longmapsto \big((h_\beta)_p^{-1} \circ (h_\alpha)_p\big)(z) \end{aligned}$$

é diferenciable. Entón existe unha única estrutura de variedade diferenciable na unión disxunta $E = \bigsqcup_{p\in M} E_p$, tal que se $\pi\colon E \to M$ é a aplicación dada por $\pi(y) = p$ se $y \in E_p$, entón $\xi = (E,\pi,M,F)$ é un espazo fibrado vectorial con atlas fibrado vectorial $\{(U_\alpha,h_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, onde

$$\begin{aligned} h_\alpha\colon U_\alpha \times F &\longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \\ (p,z) &\longmapsto h_\alpha(p,z) = (h_\alpha)_p(z). \end{aligned}$$

Demostración. Cada aplicación h_α é bixectiva e tense que $\pi \circ h_\alpha = \mathrm{pr}_1$. Ademais,

$$h_\beta^{-1} \circ h_\alpha\colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times F \to (U_\alpha \cap U_\beta) \times F$$

está dada por

$$(h_\beta^{-1} \circ h_\alpha)(p,z) = \big(p, h_{\beta\alpha}(p,z)\big), \qquad p \in U_\alpha \cap U_\beta,\ z \in F,$$

e é diferenciable por selo $h_{\beta\alpha}$ O resultado séguese inmediatamente do teorema 2.6. $\square$

Observación 2.8. Nas condicións do teorema 2.6, supoñamos que existe un atlas $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ da variedade diferenciable M, é dicir, os abertos coordenados coinciden cos abertos de trivialidade do atlas fibrado vectorial $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ de $\xi = (E, \pi, M, F)$. Neste caso, un atlas da variedade diferenciable E sería a familia

$$\widetilde{\mathcal{A}} = \big\{ \big(\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde\varphi_\alpha\big) \bigm| \alpha \in A \big\}$$

onde $\tilde\varphi_\alpha$ é a composición

$$\pi^{-1}(U_\alpha) \xrightarrow{h_\alpha^{-1}} U_\alpha \times F \xrightarrow{\varphi_\alpha\times\psi} \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^k,$$

é dicir, se $\varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$, $\psi = (z^1, \dots, z^k)$, é

$$\begin{aligned}\tilde\varphi_\alpha(y) &= (\varphi_\alpha \times \psi)\big(h_\alpha^{-1}(y)\big) = \big(\varphi_\alpha(\pi(y)), \psi((h_\alpha)^{-1}_{\pi(y)}(y)\big)\\ &= \big(x_\alpha^1(\pi(y)), \dots, x_\alpha^n(\pi(y)), z^1((h_\alpha)^{-1}_{\pi(y)}(y)), \dots, z^k((h_\alpha)^{-1}_{\pi(y)}(y))\big).\end{aligned}$$

A súa inversa $\tilde\varphi_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^k \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ está dada por

$$\begin{aligned}\tilde\varphi_\alpha^{-1}(x,a) &= h_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(x), \psi^{-1}(a)) = h_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(x), \textstyle\sum_{i=1}^k a_i u_i)\\ &= \textstyle\sum_{i=1}^k a_i (h_\alpha)_{\varphi_\alpha^{-1}(x)}(u_i) \in E_{\varphi_\alpha^{-1}(x)},\end{aligned}$$

onde $x \in \varphi_\alpha(U_\alpha) \subset \mathbb{R}^n$, $a = (a_1, \dots, a_k) \in \mathbb{R}^k$, e $\{u_1, \dots, u_k\}$ é a base de F dual de $\{z^1, \dots, z^k\}$.

Definición 2.9. Sexa E un espazo fibrado vectorial sobre unha variedade diferenciable M, con proxección $\pi \colon E \to M$. Unha *sección* de E é unha sección da aplicación π, isto é, unha aplicación $\sigma \colon M \to E$ tal que $\pi \circ \sigma = \mathrm{id}_M$; é dicir, $\sigma(p) \in E_p$ para todo $p \in M$. Se σ é unha aplicación diferenciable diremos que é unha *sección diferenciable* de E.

A *sección cero* de E é a aplicación $\theta \colon M \to E$ definida por $\theta(p) = 0 \in E_p$ para cada $p \in M$, e é trivialmente unha sección diferenciable.

Definición 2.10. Un conxunto $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ de seccións diferenciables de E dise *linearmente independente* se $\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)$ son vectores linearmente independentes en E_p para todo $p \in M$. Analogamente, diremos que $\{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ *xera* E se $\sigma_1(p), \dots, \sigma_k(p)$ xeran E_p para cada $p \in M$.

Definición 2.11. Sexan $\xi = (E, \pi, M, F)$ e $\xi' = (E', \pi', M', F')$ espazos fibrados vectoriais. Unha aplicación diferenciable $\hat{f}\colon E \to E'$ dise un *homomorfismo de fibrados vectoriais* se existe unha aplicación $f\colon M \to M'$ tal que o seguinte diagrama conmuta

$$\begin{tikzcd} E \arrow[r, "\hat{f}"] \arrow[d, "\pi"'] & E' \arrow[d, "\pi'"] \\ M \arrow[r, "f"'] & M' \end{tikzcd}$$

e a restrición $\hat{f}_{|E_p}\colon E_p \to E_{f(p)}$ é un homomorfismo de espazos vectoriais.

Se $\hat{f}$ é un homomorfismo de fibrados vectoriais que é un difeomorfismo, a súa inversa é tamén un homomorfismo de fibrados vectoriais, e dise que $\hat{f}$ é un *isomorfismo de fibrados vectoriais*. Dous espazos fibrados vectoriais diranse *isomorfos* se existe un isomorfismo de fibrados vectoriais entre eles.

Observación 2.12. A aplicación f na definición anterior é única e diferenciable, xa que se pode escribir como a composición $\pi' \circ \hat{f} \circ \theta$, onde θ é a sección cero de E.

Se $M = M'$ na anterior definición e $f = \mathrm{id}_M$ tamén se di que $\hat{f}\colon E \to E'$ é un homomorfismo de fibrados vectoriais *sobre a base*.

Por outra banda, observamos que a existencia dun isomorfismo do fibrado vectorial $\xi = (E, \pi, M, F)$ co fibrado trivial con fibra F sobre a base M equivale á existencia de k seccións diferenciables de E linearmente independentes (véxase por exemplo [9, pp. 258-259]).

2.2. O fibrado tanxente

Nesta sección construiremos o fibrado tanxente a unha variedade diferenciable como un espazo fibrado vectorial sobre ela. Para iso veremos que estamos nas hipóteses do corolario 2.7 a partir dun atlas da variedade diferenciable M de dimensión n.

• 2.13. O fibrado tanxente $\tau_M = (T(M), \pi, M, \mathbb{R}^n)$

Consideramos a unión disxunta $T(M) = \bigsqcup_{p \in M} T_p(M)$, onde $T_p(M)$ é o espazo tanxente a M en p para cada $p \in M$, e a proxección natural $\pi\colon T(M) \to M$ que asigna a cada $v \in T_p(M)$ o punto $\pi(v) = p \in M$.

Sexa $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas de M, onde $\varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \dots, x_\alpha^n)$. Para cada $\alpha \in A$ e cada $p \in U_\alpha$ temos un isomorfismo $(h_\alpha)_p\colon \mathbb{R}^n \to T_p(M)$ tal que para cada vector e_i da base canónica de $\mathbb{R}^n$ é

$$(h_\alpha)_p(e_i) = \left(\partial_{x_\alpha^i}\right)_p.$$

Para ver que $T(M)$ ten unha estrutura de variedade diferenciable abondaría probar que se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a aplicación

$$h_{\beta\alpha}\colon (p,a) \in U_\alpha \cap U_\beta \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \big((h_\beta)_p^{-1} \circ (h_\alpha)_p\big)(a) \in \mathbb{R}^n$$

é diferenciable.

Temos que $\big((h_\beta)_p^{-1} \circ (h_\alpha)_p\big)(e_i) = (h_\beta)_p^{-1}(\partial_{x^i_\alpha})_p$, mais podemos expresar $(\partial_{x^i_\alpha})_p$ na base $\{(\partial_{x^j_\beta})_p\}_{j=1}^n$ como $(\partial_{x^i_\alpha})_p = \sum_{j=1}^n (\partial x^j_\beta/\partial x^i_\alpha)_p (\partial_{x^j_\beta})_p$, polo que

$$\big((h_\beta)_p^{-1} \circ (h_\alpha)_p\big)(e_i) = \sum_{j=1}^n \Big(\frac{\partial x^j_\beta}{\partial x^i_\alpha}\Big)_p e_j,$$

e, polo tanto, para cada $a = (a_1, \dots, a_n) \in \mathbb{R}^n$,

$$\big((h_\beta)_p^{-1} \circ (h_\alpha)_p\big)(a) = \sum_{j=1}^n \Big(\sum_{i=1}^n a_i \Big(\frac{\partial x^j_\beta}{\partial x^i_\alpha}\Big)_p\Big) e_j,$$

así é que a aplicación $h_{\beta\alpha}\colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times \mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^n$ considerada no corolario 2.7, está dada por

$$h_{\beta\alpha}(p,a) = \Big(\sum_{i=1}^n a_i \Big(\frac{\partial x^1_\beta}{\partial x^i_\alpha}\Big)_p, \dots, \sum_{i=1}^n a_i \Big(\frac{\partial x^n_\beta}{\partial x^i_\alpha}\Big)_p\Big) = D(\varphi_\beta \circ \varphi_\alpha^{-1})(\varphi_\alpha(p))(a),$$

e é diferenciable.

Polo tanto, $T(M)$ ten unha única estrutura de variedade diferenciable tal que $\tau_M = (T(M), \pi, M, \mathbb{R}^n)$ é un espazo fibrado vectorial (o *fibrado tanxente* de M), para o que un atlas fibrado vectorial é $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, onde $h_\alpha\colon U_\alpha \times \mathbb{R}^n \to \pi^{-1}(U_\alpha)$ está dada por

$$h_\alpha(p,a) = \sum_{i=1}^n a_i \big(\partial_{x^i_\alpha}\big)_p.$$

O atlas correspondente da variedade diferenciable $T(M)$ (véxase a observación 2.8, onde aquí $\psi = \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}$) é $\widetilde{\mathfrak{a}} = \big\{\big(\pi^{-1}(U_\alpha), \tilde\varphi_\alpha\big) \;\big|\; \alpha \in A\big\}$, con

$$\tilde\varphi_\alpha = (\varphi_\alpha \times \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n}) \circ h_\alpha^{-1}\colon \pi^{-1}(U_\alpha) \longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n,$$

que está dado por

$$\tilde\varphi_\alpha(v) = (x^1_\alpha(p), \dots, x^n_\alpha(p), v(x^1_\alpha), \dots, v(x^n_\alpha)) \quad \text{se } v \in T_p(M),\ p \in U_\alpha,$$

e dise que $\tilde\varphi_\alpha = (\tilde x^1_\alpha, \dots, \tilde x^n_\alpha, v^1, \dots, v^n)$, onde $\tilde x^j_\alpha = x^j_\alpha \circ \pi$ e $v^j(v) = v(x^j)$, é un *sistema de coordenadas estándar* de $T(M)$. A súa aplicación inversa é

$$\begin{aligned} \tilde\varphi_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \pi^{-1}(U_\alpha) \\ (x,a) &\longmapsto \sum_{i=1}^n a_i \big(\partial_{x^i_\alpha}\big)_{\varphi_\alpha^{-1}(x)}. \end{aligned}$$

Exemplo 2.14. A partir do atlas $\mathcal{A} = \{(\mathbb{R}^n, \mathrm{id}_{\mathbb{R}^n})\}$ en $\mathbb{R}^n$ obtense un atlas $\widetilde{\mathcal{A}}$ no fibrado tanxente $T(\mathbb{R}^n)$ formado por unha única carta. O sistema de coordenadas $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = (r^1, \ldots, r^n)$ da lugar ao sistema de coordenadas estándar global $\tilde{\varphi}$ de $T(\mathbb{R}^n)$ dado por

$$\tilde{\varphi}\colon \sum_{i=1}^{n} a_i \big(\partial_{r^i}\big)_{(p_1,\ldots,p_n)} \in T(\mathbb{R}^n) \longmapsto (p_1, \ldots, p_n, a_1, \ldots, a_n) \in \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n.$$

En particular, $\tilde{\varphi}$ é un isomorfismo de fibrados vectoriais do fibrado tanxente $T(\mathbb{R}^n)$ no fibrado trivial sobre $\mathbb{R}^n$ con fibra $\mathbb{R}^n$.

Proposición 2.15. *Se $f\colon M \to N$ é unha aplicación diferenciable entre variedades diferenciables entón a* aplicación tanxente *$f_*\colon T(M) \to T(N)$, definida por $f_*(v) = f_{*p}(v)$ para cada $v \in T_p(M)$, $p \in M$, tamén é diferenciable, e é un homomorfismo de fibrados vectoriais sobre f. Ademais, se f é un difeomorfismo entón f_* é un isomorfismo.*

Demostración. Debemos probar que para todo vector $v \in T(M)$ existe unha expresión local C^∞ de f_* en v.

Se $v \in T_p(M) \subset T(M)$, entón $f_*(v) = f_{*p}(v) \in T_{f(p)}(N)$. Dado que f é diferenciable existen cartas (U, φ) de M e (V, ψ) de N con $p \in U$ e $f(p) \in V$, tales que $f(U) \subset V$ e $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$ é C^∞. Sexan π e π' as proxeccións dos fibrados tanxentes de M e N, respectivamente, e consideremos as cartas $(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi})$ e $(\pi'^{-1}(V), \widetilde{\psi})$ de $T(M)$ e $T(N)$, definidas por φ e ψ respectivamente (ver 2.13). Entón $f_*(\pi^{-1}(U)) \subset \pi'^{-1}(V)$ e $\widetilde{\psi} \circ f_* \circ \widetilde{\varphi}^{-1}$ é unha expresión local de f_* en v.

Pola interpretación da aplicación tanxente en termos de coordenadas en 1.17 e da expresión das cartas asociadas no fibrado tanxente descrita en 2.13 temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{\psi} \circ f_* \circ \widetilde{\varphi}^{-1}\colon \varphi(U) \times \mathbb{R}^n &\longrightarrow \psi(V) \times \mathbb{R}^{n'} \\ (x, a) &\longmapsto \big(\psi f \varphi^{-1}(x), D(\psi f \varphi^{-1})(x)(a)\big), \end{aligned}$$

que é C^∞ por selo $\psi \circ f \circ \varphi^{-1}$. □

2.3. Campos de vectores

Definición 2.16. Un *campo de vectores* sobre unha variedade diferenciable M é unha aplicación

$$\begin{aligned} X\colon M &\longrightarrow T(M) \\ p &\longmapsto X_p \end{aligned}$$

tal que $X_p \in T_pM$ para cada $p \in M$, isto é, X é unha sección da proxección π do fibrado tanxente. Falaremos dun *campo de vectores diferenciable* X cando ademais X sexa unha aplicación diferenciable entre as variedades M e $T(M)$.

Se (U, φ) é unha carta de M, con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, tense que $\big(\partial_{x^i}\big)_p$ é un vector tanxente a M en p para cada $i = 1, \dots, n$ (véxase 1.16), o que leva a definir os *campos coordenados* sobre U

$$\begin{aligned}\partial_{x^i} \colon U &\longrightarrow T(U)\\ p &\longmapsto \big(\partial_{x^i}\big)_p \in T_p(U) \cong T_p(M)\,.\end{aligned}$$

Se X é un campo de vectores sobre M e (U, φ) é unha carta de M, $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, para cada $p \in U$ o conxunto $\big\{\big(\partial_{x^1}\big)_p, \dots, \big(\partial_{x^n}\big)_p\big\}$ é unha base de $T_p(M)$, e pódese escribir

$$X_p = \sum_{i=1}^{n} X^i(p)\big(\partial_{x^i}\big)_p,$$

o que define as funcións $X^i \colon U \to \mathbb{R}$, que chamamos as *funcións compoñentes* de X respecto da carta (U, φ), e son tales que $X^i(p) = X_p(x^i)$, para cada $i = 1, \dots, n$. Tamén se di que

$$X_{|U} = \sum_{i=1}^{n} X^i\,\partial_{x^i}$$

é a *expresión local* de X en (U, φ).

Proposición 2.17 (Criterio de diferenciabilidade para campos de vectores)**.** *Dado un campo de vectores X sobre unha variedade diferenciable M, X é un campo de vectores diferenciable se, e só se, para cada carta (U, φ) de M, as compoñentes de X respecto de (U, φ) son funcións diferenciables.*

Demostración. Sexa (U, φ) unha carta de M, $(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi})$ a correspondente carta de $T(M)$ e supoñemos que $X_{|U} = \sum_{i=1}^{m} X^i\,\partial_{x^i}$ é a expresión local de X en (U, φ). A expresión local de $X \colon M \to T(M)$ respecto das cartas (U, φ) e $(\pi^{-1}(U), \widetilde{\varphi})$ de M e $T(M)$, respectivamente, está dada por

$$\begin{aligned}\widetilde{\varphi} \circ X \circ \varphi^{-1}(x) &= \widetilde{\varphi}\bigg(\sum_{i=1}^{m} X^i(\varphi^{-1}(x))(\partial_{x^i})_{\varphi^{-1}(x)}\bigg)\\ &= \big(x^1(\varphi^{-1}(x)), \dots, x^m(\varphi^{-1}(x)), X^1(\varphi^{-1}(x)), \dots, X^m(\varphi^{-1}(x))\big),\end{aligned}$$

do que se deduce (xa que $x^1, \dots, x^m$ son sempre funcións diferenciables) que $X_{|U}$ é diferenciable se, e só se, as compoñentes X^i de X respecto da carta (U, φ) tamén o son. □

Observación 2.18. En particular, para cada carta (U, φ) de M (onde $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$), os campos coordenados ∂_{x^i} sobre o aberto coordenado U son campos de vectores diferenciables, xa que as súas compoñentes en (U, φ) son funcións constantes.

O conxunto de tódolos campos de vectores diferenciables sobre a variedade M será denotado por $\mathfrak{X}(M)$.

• **2.19** (*Estrutura alxébrica de* $\mathfrak{X}(M)$).

Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e $h \in \mathcal{F}(M)$ (o anel das funcións reais diferenciables sobre M), defínense os campos de vectores $X + Y$, λX, $hX : M \longrightarrow T(M)$, por

$$(X + Y)_p = X_p + Y_p\,, \quad (\lambda X)_p = \lambda X_p\,, \quad (hX)_p = h(p) X_p\,.$$

Entón $X + Y$, λX e hX son campos de vectores diferenciables sobre M, pois as súas compoñentes respecto de cada carta de M son diferenciables.

O conxunto $\mathfrak{X}(M)$ ten unha estrutura de espazo vectorial real e de módulo sobre o anel $\mathcal{F}(M)$. O elemento neutro para a suma é o campo de vectores $0 : M \to T(M)$, que asigna a cada $p \in M$ o vector nulo de $T_p(M)$, e é trivialmente un campo de vectores diferenciable.

Exemplo 2.20. (*Variedades paralelizables*)

Se nunha variedade diferenciable n-dimensional M existen n campos de vectores diferenciables independentes $X_1, \ldots, X_n$ (como seccións do fibrado tanxente $T(M)$, no sentido da definición 2.10) dise que M é unha *variedade paralelizable* e que $\{X_1, \ldots, X_n\}$ é unha paralelización de M. Neste caso $\mathfrak{X}(M)$ é un $\mathcal{F}(M)$-módulo finitamente xerado.

Calquera aberto coordenado nunha variedade diferenciable é unha variedade parlelizable. É o caso de $\mathbb{R}^n$. Cada campo de vectores diferenciable $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R}^n)$ ten unha expresión

$$X = \sum_{i=1}^{n} \lambda^i\, \partial_{r^i}, \qquad \lambda^i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n),\ i = 1, \ldots, n,$$

onde

$$\begin{aligned} \partial_{r^i} : \mathbb{R}^n &\longrightarrow T(\mathbb{R}^n) \\ p &\longmapsto \big(\partial_{r^i}\big)_p : h \in \mathcal{F}_p(\mathbb{R}^n) \mapsto \left(\frac{\partial h}{\partial r^i}\right)_p = D_i h(p) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

$\{\partial_{r^1}, \ldots, \partial_{r^n}\}$ é unha paralelización de $\mathbb{R}^n$ e $\mathbb{R}^n$ é unha variedade paralelizable. Tamén o é calquera subvariedade aberta de $\mathbb{R}^n$.

En particular, dado o sistema de coordenadas identidade $\mathrm{id}_{\mathbb{R}} = (r)$ de $\mathbb{R}$, se $X \in \mathfrak{X}(\mathbb{R})$ entón $X = \lambda\, \partial_r$, onde $\lambda : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é unha función C^∞ e

$$\begin{aligned} \partial_r : \mathbb{R} &\longrightarrow T(\mathbb{R}) \\ p &\longmapsto \big(\partial_r\big)_p : h \in \mathcal{F}_p(\mathbb{R}) \mapsto h'(p) \in \mathbb{R}. \end{aligned}$$

Tamén hai variedades paralelizables que non teñen un atlas formado por unha única carta, como sucede con algunhas variedades compactas. No caso das esferas, as únicas paralelizables son $\mathbb{S}^1$, $\mathbb{S}^3$ e $\mathbb{S}^7$ (Bott e Milnor [2]).

Exemplo 2.21. (*Campo coordenada angular sobre* $\mathbb{S}^1$)

A circunferencia unidade $\mathbb{S}^1$ é unha subvariedade regular de $\mathbb{R}^2$ de dimensión 1. (ver os exemplos 1.21 e 1.24). A aplicación $\rho\colon \mathbb{R} \to \mathbb{S}^1$ dada por

$$\rho(t) = e^{it} = (\cos t, \operatorname{sen} t)$$

é un difeomorfismo local e a súa restrición a cada intervalo aberto de lonxitude $\leq 2\pi$ é un difeomorfismo na súa imaxe. En particular, $\rho_1\colon (0, 2\pi) \to U_1 = \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}$ e $\rho_2\colon (-\pi, \pi) \to U_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1,0)\}$ son difeomorfismos; denotamos os seus inversos por θ_1 e θ_2, respectivamente, así (U_1, θ_1) e (U_2, θ_2) son cartas de $\mathbb{S}^1$. O cambio de cartas

$$\theta_2 \circ \theta_1^{-1}\colon \theta_1(U_1 \cap U_2) = (0, \pi) \cup (\pi, 2\pi) \longrightarrow \theta_2(U_1 \cap U_2) = (-\pi, 0) \cup (0, \pi)$$

está dado por $\theta_2 \circ \theta_1^{-1}(t) = t$ para $t \in (0, \pi)$ e $\theta_2 \circ \theta_1^{-1}(t) = t - 2\pi$ para $t \in (\pi, 2\pi)$.

Se consideramos os correspondentes campos coordenados ∂_{θ_1} e ∂_{θ_2}, entón, para cada $p \in U_1 \cap U_2$, tense

$$\big(\partial_{\theta_1}\big)_p = \Big(\frac{\partial \theta_2}{\partial \theta_1}\Big)_p \big(\partial_{\theta_2}\big)_p = (\theta_2 \circ \theta_1^{-1})'(\theta_1(p))\big(\partial_{\theta_2}\big)_p = \big(\partial_{\theta_2}\big)_p,$$

e polo tanto o *campo de vectores coordenada angular* sobre $\mathbb{S}^1$ dado por

$$\begin{aligned} \partial_\theta\colon \mathbb{S}^1 &\longrightarrow T(\mathbb{S}^1) \\ p &\longmapsto \begin{cases} \big(\partial_{\theta_1}\big)_p & \text{se } p \in U_1 \\ \big(\partial_{\theta_2}\big)_p & \text{se } p \in U_2. \end{cases} \end{aligned}$$

está ben definido e é diferenciable. Aínda que se denota con ∂_θ, debemos observar que este campo de vectores sobre toda a circunferencia $\mathbb{S}^1$ non é un campo coordenado. Ademais, $\{\partial_\theta\}$ é unha paralelización de $\mathbb{S}^1$, así que o fibrado tanxente $T(\mathbb{S}^1)$ e o fibrado trivial $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$ son isomorfos.

• **2.22.** (*Propiedade de extensión local de campos de vectores diferenciables*)

Como consecuencia da propiedade de extensión local de funcións diferenciables (1.11), se Z é un campo de vectores diferenciable sobre un aberto W na variedade diferenciable M e $p \in W$, daquela existe unha veciñanza aberta V de p, $\overline{V} \subset W$, e existe un campo de vectores diferenciable X sobre M tal que $X_{|V} = Z_{|V}$.

Ademais, se $v \in T_p(M)$ pódese definir un campo de vectores diferenciables nun aberto coordenado que contén a p que teña como compoñentes as constantes do vector v e, polo tanto, existe $X \in \mathfrak{X}(M)$ tal que $X_p = v$.

• **2.23.** (*Outra caracterización da diferenciabilidade dun campo de vectores*)

Se X é un campo de vectores sobre unha variedade diferenciable M e $f\colon M \to \mathbb{R}$ é unha función diferenciable, definimos a función

$$\begin{aligned} Xf\colon M &\longrightarrow \mathbb{R} \\ p &\longmapsto (Xf)(p) = X_p(f). \end{aligned}$$

Un campo de vectores X sobre M é diferenciable se, e só se, para cada función diferenciable $f\colon M \to \mathbb{R}$, a función $Xf\colon M \to \mathbb{R}$ tamén o é.

En efecto, se X é un campo de vectores sobre M e $f \in \mathcal{F}(M)$, entón para toda carta (U,φ) de M, $\varphi = (x^1,\ldots,x^n)$, se a expresión local de X en (U,φ) é $X_{|U} = \sum_{i=1}^n X^i\,\partial_{x^i}$, onde cada X^i é unha función real definida en U, tense

$$(Xf)_{|U} = \sum_{i=1}^n X^i\,\partial_{x^i}(f) = \sum_{i=1}^n X^i \frac{\partial f}{\partial x^i} = \sum_{i=1}^n \big((X^i \circ \varphi^{-1}) D_i(f \circ \varphi^{-1})\big) \circ \varphi,$$

e da proposición 2.17 e de que $(Xf)_{|U} = X_U(f_{|U})$ (polo comportamento local dos vectores tanxentes, (1.13)), séguese que o campo de vectores X é diferenciable no aberto U se, e só se, o é a función $(Xf)_{|U}$ para cada $f \in \mathcal{F}(M)$.

• **2.24.** Dada a álxebra $\mathcal{F}(M)$ das funcións diferenciables sobre M, para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, hai unha aplicación ben definida

$$\begin{aligned} X\colon \mathcal{F}(M) &\longrightarrow \mathcal{F}(M) \\ f &\longmapsto Xf\,, \end{aligned}$$

e, polas propiedades na definición 1.12 de vector tanxente, a aplicación $X\colon \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ satisfai as seguintes regras de derivación:

$$\begin{aligned} &\text{(a)} \qquad X(f+g) = Xf + Xg, \quad X(\lambda f) = \lambda(Xf), \\ &\text{(b)} \qquad X(fg) = (Xf)\cdot g + f\cdot(Xg), \end{aligned}$$

para cada $f, g \in \mathcal{F}(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

Unha aplicación $X\colon \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$ que verifica as condicións (a), (b) anteriores, chámase *derivación* de $\mathcal{F}(M)$.

Así pois, por 2.23, un campo de vectores diferenciable sobre unha variedade diferenciable M pódese considerar ou ben como una sección diferenciable do fibrado tanxente $X\colon M \to T(M)$ ou ben como unha derivación $X\colon \mathcal{F}(M) \to \mathcal{F}(M)$. A relación entre as dúas interpretacións está dada por

$$X(f)(p) = (Xf)(p) = X_p(f), \qquad X \in \mathfrak{X}(M),\ f \in \mathcal{F}(M),\ p \in M.$$

Definición 2.25. O *produto corchete* de dous campos de vectores diferenciables X e Y sobre M é o campo de vectores $[X,Y] \in \mathfrak{X}(M)$ definido pola derivación de $\mathcal{F}(M)$ dada por

$$\begin{aligned} [X,Y]\colon \mathcal{F}(M) &\longrightarrow \mathcal{F}(M) \\ f &\longmapsto X(Yf) - Y(Xf)\,, \end{aligned}$$

A aplicación $[\ ,\ ]\colon \mathfrak{X}(M) \times \mathfrak{X}(M) \to \mathfrak{X}(M)$ é $\mathbb{R}$-bilinear e satisfai as seguintes propiedades:

(a) $[X,Y] = -[Y,X]$,

(b) $[[X,Y],Z] + [[Y,Z],X] + [[Z,X],Y] = 0$.

Definición 2.26. Sexa $f\colon M \to N$ unha aplicación diferenciable. Se X e Y son campos de vectores sobre as variedades diferenciables M e N, respectivamente, dise que X está *f-relacionado* con Y se $f_{*p}(X_p) = Y_{f(p)}$ para todo $p \in M$.

Proposición 2.27. *Se $f\colon M \to N$ é un difeomorfismo entre as variedades diferenciables M e N, para cada campo de vectores diferenciable X sobre M existe un único campo de vectores diferenciable Y sobre N tal que X está f-relacionado con Y. Denótase $Y = f_* X$.*

Demostración. Posto que f é bixectiva, dado $X \in \mathfrak{X}(M)$, está ben definido o campo de vectores sobre N dado por

$$\begin{aligned} Y\colon N &\longrightarrow T(N) \\ q &\longmapsto Y_q = f_{*f^{-1}(q)}(X_{f^{-1}(q)}) \in T_q(N), \end{aligned}$$

que é o único que verifica $f_{*p}(X_p) = Y_{f(p)}$ para cada $p \in M$.

Por ser f diferenciable, a aplicación tanxente f_* tamén o é, pola proposición 2.15. Polo tanto, Y é un campo de vectores diferenciable sobre N por ser composición de aplicacións diferenciables,

$$N \xrightarrow{f^{-1}} M \xrightarrow{X} T(M) \xrightarrow{f_*} T(N). \qquad \square$$

Exemplo 2.28. (*Campos de vectores sobre as esferas*)

A esfera $\mathbb{S}^n$ é unha subvariedade regular de $\mathbb{R}^{n+1}$ que, como pode verse no exemplo 1.24, pode obterse como a imaxe inversa do valor regular $1 \in \mathbb{R}$ da aplicación $f = \sum_{j=1}^{n+1} (r^j)^2$. Un campo de vectores diferenciable $X = \sum_{i=1}^{n+1} \lambda^i\, \partial_{r^i}$ sobre $\mathbb{R}^{n+1}$, onde cada $\lambda^i \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^{n+1})$, é tanxente á subvariedade $\mathbb{S}^n$ se, e só se, $X_p \in \boldsymbol{i}_{*p}(T_p(\mathbb{S}^n)) = \operatorname{Ker} f_{*p}$, é dicir, $f_{*p}(X_p) = X_p(f)\big(\partial_r\big)_q = 0$ para cada $p \in \mathbb{S}^n$, ou, equivalentemente, $(Xf)_{|\mathbb{S}^n} = 0$, isto é,

$$\sum_{j=1}^{n+1} (r^j \lambda^j)_{|\mathbb{S}^n} = 0.$$

Neste caso X pódese restrinxir a un campo de vectores diferenciable $X_{|\mathbb{S}^n} \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^n)$. Se poñemos $n = 2k - 1$ para n impar e $n = 2k$ para n par, un exemplo de campo de vectores diferenciable sobre $\mathbb{R}^{n+1}$ tanxente a $\mathbb{S}^n$ é

$$X = -r^2\partial_{r^1} + r^1\partial_{r^2} - r^4\partial_{r^3} + r^3\partial_{r^4} + \cdots - r^{2k}\partial_{r^{2k-1}} + r^{2k-1}\partial_{r^{2k}}.$$

No caso impar $n = 2k - 1$, $X_{|\mathbb{S}^n}$ é un campo de vectores non nulo en tódolos puntos da esfera.

En particular, se $n = 1$ escribimos $(r^1, r^2) = (x, y)$ e tense que o campo de vectores $X = -y\partial_x + x\partial_y$ sobre $\mathbb{R}^2$ é tanxente a $\mathbb{S}^1$, co que define o campo de vectores $X_{|\mathbb{S}^1} \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^1)$ que é precisamente o campo de vectores coordenada angular ∂_θ (exemplo 2.21). En efecto, se $\boldsymbol{i}\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ é a inclusión e $p \in U_1 = \mathbb{S}^1 \setminus \{(1,0)\}$ entón

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{i}_{*p}\big(\partial_\theta\big)_p &= \boldsymbol{i}_{*p}\big(\partial_{\theta_1}\big)_p = \boldsymbol{i}_{*p}\big(\partial_{\theta_1}\big)_p(x)\big(\partial_x\big)_p + \boldsymbol{i}_{*p}\big(\partial_{\theta_1}\big)_p(y)\big(\partial_y\big)_p \\
&= \big(\partial_{\theta_1}\big)_p(x \circ \boldsymbol{i})\big(\partial_x\big)_p + \big(\partial_{\theta_1}\big)_p(y \circ \boldsymbol{i})\big(\partial_y\big)_p \\
&= (x \circ \boldsymbol{i} \circ \theta_1^{-1})'(\theta_1(p))\big(\partial_x\big)_p + (y \circ \boldsymbol{i} \circ \theta_1^{-1})'(\theta_1(p))\big(\partial_y\big)_p \\
&= -\operatorname{sen}\theta_1(p)\big(\partial_x\big)_p + \cos\theta_1(p)\big(\partial_y\big)_p \\
&= -y(p)\big(\partial_x\big)_p + x(p)\big(\partial_y\big)_p = X_p,
\end{aligned}$$

e, da mesma forma, se $p \in U_2 = \mathbb{S}^1 \setminus \{(-1,0)\}$, tense $\boldsymbol{i}_{*p}\big(\partial_\theta\big)_p = \boldsymbol{i}_{*p}\big(\partial_{\theta_2}\big)_p = X_p$. É dicir, ∂_θ está $\boldsymbol{i}$-relacionado con X e $\partial_\theta = (-y\partial_x + x\partial_y)_{|\mathbb{S}^1}$.

2.4. Fluxos locais

• **2.29.** (*Curvas integrais dun campo de vectores*)

Se M é unha variedade diferenciable e $I \subset \mathbb{R}$ un intervalo aberto (non necesariamente limitado), unha *curva* en M é unha aplicación continua $\alpha\colon I \to M$. Dicimos que unha curva α en M é unha *curva diferenciable* se é una aplicación diferenciable, o que equivale dicir que para carta (U, φ) de M, a aplicación $\varphi \circ \alpha\colon \alpha^{-1}(U) \subset I \to \mathbb{R}^m$ é C^∞. Se $0 \in I$ e $p = \alpha(0)$, dicimos que α ten *punto inicial* p.

Se $\alpha\colon I \to M$ é unha curva diferenciable, o *vector tanxente a* α *en* $t \in I$ é

$$\dot{\alpha}(t) = \alpha_{*t}(\partial_r)_t \in T_{\alpha(t)}(M),$$

onde r é a carta identidade en I.

Se X é un campo de vectores diferenciable sobre M, a curva diferenciable α é unha *curva integral* de X se

$$\dot{\alpha}(t) = X_{\alpha(t)}, \qquad t \in I.$$

• **2.30.** (*Fluxo local dun campo de vectores*)

Sexa U un aberto nunha variedade diferenciable M e consideremos o intervalo aberto $I_\varepsilon = (-\varepsilon, \varepsilon)$, onde $0 < \varepsilon \leq \infty$

Un *grupo local uniparamétrico de transformacións locais* de M é unha aplicación diferenciable

$$\begin{aligned} \Phi\colon I_\varepsilon \times U &\longrightarrow M \\ (t,p) &\longmapsto \Phi(t,p) = \Phi_t(p), \end{aligned}$$

que satisfai as seguintes condicións

(1) $\Phi_0(p) = p$, para todo $p \in U$,

(2) se $t, s, t+s \in I_\varepsilon$, e $p, \Phi_s(p) \in U$, entón $\Phi_{t+s}(p) = \Phi_t(\Phi_s(p))$.

Á familia de aplicacións $\{\Phi_t\colon U \to M\}_{t \in I_\varepsilon}$ tamén se lle chama grupo local uniparamétrico de transformacións locais de M.

Se $\Phi\colon I_\varepsilon \times U \to M$ é un grupo local uniparamétrico de transformacións locais entón, para cada punto $p_0 \in U$, existe unha veciñanza aberta V de p_0, $V \subset U$, e existe $\delta > 0$, tal que $\Phi_t\colon V \to \Phi_t(V)$ é unha transformación local de M (é dicir, un difeomorfismo de V na súa imaxe $\Phi_t(V)$) para todo $t \in I_\delta$.

Para cada $p \in U$, a aplicación $\Phi^p\colon I_\varepsilon \to M$ dada por $\Phi^p(t) = \Phi(t,p)$ é unha curva integral con punto inicial p do campo de vectores diferenciable X sobre U definido por

$$X_p(f) = (f \circ \Phi^p)'(0) = \lim_{t \to 0} \frac{(f \circ \Phi_t)(p) - f(p)}{t}, \qquad p \in U,\ f \in \mathcal{F}_p(M).$$

No caso en que $I_\varepsilon = \mathbb{R}$ e $U = M$, teriamos un grupo (global) uniparamétrico de transformacións $\Phi\colon \mathbb{R} \times M \to M$, e este daría lugar a un campo de vectores diferenciable X sobre M que se chama o *xerador infinitesimal* de Φ; tamén se di que Φ é o *fluxo* de X, e as curvas integrais Φ^p de X estarían definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. Pero non sempre se verifica que un campo de vectores diferenciable sobre M sexa o xerador infinitesimal dun grupo global uniparamétrico de transformacións de M, xa que as súas curvas integrais non teñen porque estar definidas en todo $\mathbb{R}$.

Agora ben, tense un importante resultado local, dado polo seguinte teorema, onde se mostra que cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ xera un grupo de transformacións locais $\Phi\colon I_\varepsilon \times U \to M$ nunha veciñanza aberta U dun punto dado na variedade; tamén se di que Φ (ou $\{\Phi_t \mid t \in I_\varepsilon\}$) é un *fluxo local* de X en U. (A idea da proba está tomada de [10, pp. 82-83])

Teorema 2.31 (Existencia de fluxos locais)**.** *Se X é un campo de vectores diferenciable sobre unha variedade diferenciable M entón, para cada punto q en M, existen unha veciñanza aberta U de q e un grupo local uniparamétrico de transformacións locais $\{\Phi_t\colon U \to M\}_{t \in I_\varepsilon}$, para algún $\varepsilon > 0$, xerado por X en U.*

Demostración. Sexan $q \in M$ e (V,φ) unha carta de M en q, con $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$, e supoñamos que a expresión local de X en (V,φ) é $X_{|V} = \sum_{i=1}^n \lambda^i \,\partial_{x^i}$, con $\lambda^i \in \mathcal{F}(V)$, $i = 1,\dots,n$. Consideramos a ecuación diferencial $x' = F(t,x)$, onde $F\colon \mathbb{R}\times\varphi(V) \to \mathbb{R}^n$ é a aplicación C^∞ dada por

$$F(t,x) = \big((\lambda^1 \circ \varphi^{-1})(x),\dots,(\lambda^n \circ \varphi^{-1})(x)\big).$$

Polo teorema de existencia de solucións dunha ecuación diferencial, existen $\varepsilon > 0$, unha veciñanza aberta $\tilde U \subset \varphi(V)$ de $\varphi(q)$, e unha aplicación $\tilde\Phi\colon (-\varepsilon,\varepsilon)\times\tilde U \to \varphi(V)$ de clase C^∞ tal que para cada $x \in \tilde U$, a aplicación $\tilde\Phi^x\colon t \in I_\varepsilon \to \tilde\Phi^x(t) = \tilde\Phi(t,x) \in \varphi(V)$ é a única solución da ecuación diferencial $x' = F(t,x)$ coa condición inicial $\tilde\Phi^x(0) = x$.

Poñemos $U = \varphi^{-1}(\tilde U) \subset V$ e definimos $\Phi\colon I_\varepsilon \times U \to M$ por

$$\Phi(t,p) = \Phi_t(p) = \varphi^{-1}\big(\tilde\Phi(t,\varphi(p))\big),$$

que é diferenciable, pois é a composición $\varphi^{-1}\circ\tilde\Phi\circ(\mathrm{id}_{I_\varepsilon}\times\varphi_{|U})$. Imos ver que Φ satisfai as condicións (1) e (2) en 2.30 de grupo local uniparamétrico de transformacións locais:

(1) Se $p \in U$, $\Phi_0(p) = \varphi^{-1}\big(\tilde\Phi(0,\varphi(p))\big) = \varphi^{-1}(\varphi(p)) = p$.

(2) Se $t, s, t+s \in I_\varepsilon$ e $p, \Phi_s(p) \in U$ entón $\varphi(p) = x_0 \in \tilde U$ e $\varphi(\Phi_s(p)) = \tilde\Phi(s,x_0) \in \tilde U$, logo

$$\Phi_{t+s}(p) = \varphi^{-1}\big(\tilde\Phi(t+s,x_0)\big), \qquad \Phi_t(\Phi_s(p)) = \varphi^{-1}\big(\tilde\Phi(t,\tilde\Phi(s,x_0))\big),$$

co que para ver que $\Phi_{t+s}(p) = \Phi_t(\Phi_s(p))$ abonda comprobar que $\tilde\Phi(t+s,x_0) = \tilde\Phi(t,\tilde\Phi(s,x_0))$. Isto é consecuencia da unicidade da solución da ecuación diferencial $x' = F(t,x)$ cunha condición inicial dada. En efecto, as aplicacións α e β definidas en $(-\varepsilon,\varepsilon)$ e $(-\varepsilon - s, \varepsilon - s)$ respectivamente, dadas por $\alpha(t) = \tilde\Phi(t,\tilde\Phi(s,x_0))$ e $\beta(t) = \tilde\Phi(t+s,x_0)$, son solucións da ecuación diferencial $x' = F(t,x)$ coa mesma condición inicial $\alpha(0) = \tilde\Phi(0,\tilde\Phi(s,x_0)) = \tilde\Phi(s,x_0) = \beta(0)$, xa que $\beta'(t) = (\tilde\Phi^{x_0})'(t+s) = F(t+s,\tilde\Phi(t+s,x_0)) = F(t,\tilde\Phi(t+s,x_0)) = F(t,\beta(t))$, co que $\alpha(t) = \beta(t)$.

Ademais, no aberto U, o campo de vectores X está definido por Φ, xa que se $p \in U$ e $\Phi^p\colon t \in I_\varepsilon \to \Phi(t,p) \in M$ entón

$$(\varphi\circ\Phi^p)'(0) = (\tilde\Phi^{\varphi(p)})'(0) = F(0,\varphi(p)) = (\lambda^1(p),\dots,\lambda^n(p)).$$

Polo tanto, $(x^i \circ \Phi^p)'(0) = \lambda^i(p)$ para cada $i = 1,\dots,n$, e logo

$$X_p(f) = \sum_{i=1}^n \lambda^i(p)\big(\partial_{x^i}\big)_p(f) = \sum_{i=1}^n (x^i\circ\Phi^p)'(0)\big(\partial_{x^i}\big)_p(f) = \Phi^p_{*0}\big(\partial_r\big)_0(f) = (f\circ\Phi^p)'(0). \qquad \square$$

• **2.32.** (*Derivada de Lie dun campo de vectores*)

Sexa X un campo de vectores diferenciable sobre unha variedade diferenciable M e para cada $p \in M$, consideramos o fluxo local $\{\Phi_t : U \to M\}_{t \in I_\varepsilon}$ de X nunha veciñanza aberta U de p (que existe polo teorema 2.31). Como se observa en 2.30, para cada $t \in I_\varepsilon$, existe unha veciñanza aberta V de p contida en U e existe un $\delta > 0$ tal que $\Phi_t : V \to \Phi_t(V)$ é un difeomorfismo con inverso Φ_{-t}. Polo tanto, para cada $t \in I_\delta$, $(\Phi_t)_{*p}$ é un isomorfismo, con inverso

$$(\Phi_{-t})_{*\Phi_t(p)} : T_{\Phi_t(p)}(M) \longrightarrow T_p(M).$$

Isto permite comparar como cambia outro campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(M)$ na dirección de X no punto p, é dicir, ao longo da curva integral de X con punto inicial p, mediante a seguinte definición (coa notación da proposición 2.27):

Definición 2.33. Sexan X e Y campos de vectores diferenciables sobre unha variedade diferenciable M, $p \in M$. A *derivada de Lie de* Y *con respecto a* X *en* p é

$$(\mathcal{L}_X Y)_p = \lim_{t \to 0} \frac{\big((\Phi_{-t})_* Y\big)_p - Y_p}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(\Phi_{-t})_{*\Phi_t(p)} Y_{\Phi_t(p)} - Y_p}{t},$$

onde $\{\Phi_t : U \to M\}_{t \in I_\varepsilon}$ é un fluxo local de X nunha veciñanza aberta U de p.

Como consecuencia do seguinte teorema, $\mathcal{L}_X Y$ está ben definido e é un campo de vectores diferenciable sobre M, proporciona ademais unha interpretación xeométrica do produto corchete de dous campos de vectores.

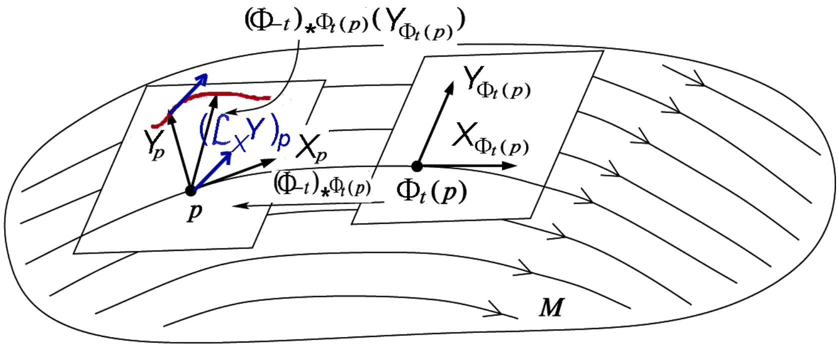
Teorema 2.34. *Se* X *e* Y *son campos de vectores diferenciables sobre* M *entón*

$$\mathcal{L}_X Y = [X, Y].$$

Demostración. Sexan $p \in M$, $\{\Phi_t : U \to M\}_{t \in I_\varepsilon}$ un fluxo local de X nunha veciñanza aberta U de p e $f \in \mathcal{F}(M)$. Temos

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X Y)_p(f) &= \left(\lim_{t \to 0} \frac{(\Phi_{-t})_{*\Phi_t(p)} Y_{\Phi_t(p)} - Y_p}{t} \right)(f) \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{Y_{\Phi_t(p)}(f \circ \Phi_{-t}) - Y_p(f)}{t} \\
&= \lim_{t \to 0} \frac{Y_{\Phi_t(p)}(f \circ \Phi_{-t}) - Y_{\Phi_t(p)}(f)}{t} + \lim_{t \to 0} \frac{Y_{\Phi_t(p)}(f) - Y_p(f)}{t} \\
&= -\lim_{t \to 0} Y_{\Phi_t(p)} \Big(\frac{f \circ \Phi_{-t} - f}{-t} \Big) + X_p(Y(f)) \\
&= -Y_p(X(f)) + X_p(Y(f)) \\
&= [X, Y]_p(f),
\end{aligned}$$

onde empregamos a expresión, dada en 2.30 en termos dos fluxos locais, dos vectores dos campos X e Y ao actuar sobre funcións.



□

Observación 2.35. No teorema anterior apréciase que se o campo de vectores Y é invariante polo fluxo de X, é dicir, se $(\Phi_t)_*(Y) = Y$ no dominio de definición de tódolos Φ_t, entón $[X,Y] = 0$. Tamén é certo o recíproco, e tamén é equivalente a que X sexa invariante polo fluxo de Y, xa que $[X,Y] = -[Y,X]$. Ademais se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$ e Φ e Ψ son fluxos locais de X e Y, respectivamente, entón X e Y conmutan ($[X,Y] = 0$) no seu dominio se, e só se, os seus fluxos conmutan, isto é, $\Phi_t \circ \Psi_s = \Psi_s \circ \Phi_t$ para cada t, s (véxase [8, pp. 15-16]).

Capítulo 3

Fibrados exteriores e formas diferenciais

Unha forma diferencial sobre unha variedade diferenciable M é unha correspondencia que asigna a cada punto p da variedade unha forma linear (aplicación multilinear antisimétrica) sobre o espazo tanxente $T_p(M)$. As funcións diferenciables reais definidas en M son as formas de grao 0; as súas diferenciais son formas de grao 1 e xeneralizan localmente tódalas formas de grao 1 e a través do produto exterior tamén dan lugar localmente ás formas diferenciais de calquera grao. Por outra banda, tal como os campos de vectores sobre M se definen como seccións do fibrado tanxente $T(M)$, as formas de grao 1 van definirse como sección do seu dual, o fibrado cotanxente $T^*(M)$, e as formas de calquera grao $k \geq 1$ como seccións de fibrados exteriores $\bigwedge^k T(M)$, que xeneralizan o fibrado cotanxente.

3.1. Formas lineares

Definición 3.1. Sexa V un espazo vectorial real de dimensión finita $n \geq 1$ e sexa $k \in \mathbb{N}$. Unha *forma linear* de grao k (ou *k-forma linear*) sobre V é unha aplicación multilinear e antisimétrica $\omega\colon V \times \overset{(k)}{\cdots} \times V \to \mathbb{R}$; isto é, ω satisfai as propiedades

$$\omega(v_1, \ldots, \lambda v_i + \mu v_i', \ldots, v_k) = \lambda\omega(v_1, \ldots, v_i, \ldots, v_k) + \mu\omega(v_1, \ldots, v_i', \ldots, v_k),$$
$$\omega(v_{\sigma(1)}, \ldots, v_{\sigma(k)}) = \varepsilon(\sigma)\omega(v_1, \ldots, v_k),$$

para $v_1, \ldots, v_i, v_i', \ldots, v_k \in V$, $(i = 1, \ldots, k)$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, e onde $\mathfrak{S}_k$ é o grupo de permutacións de $\{1, \ldots, k\}$ e $\varepsilon\colon\ \mathfrak{S}_k \to \{-1, 1\}$ a sinatura.

O conxunto das k-formas lineares sobre V denotarémolo con $\bigwedge^k(V)$, e ten unha estrutura de espazo vectorial real. En particular, $\bigwedge^1(V) = V^*$ é o espazo vectorial dual de V, e poñemos $\bigwedge^0(V) = \mathbb{R}$.

Observación 3.2. Se $\{u_1,\dots,u_n\}$ é unha base de V, cada $\omega \in \bigwedge^k(V)$ está determinada, por ser multilinear, polos seus valores sobre as k-tuplas $(u_{i_1},\dots,u_{i_k})$ de elementos da base e, por ser antisimétrica, polos seus valores sobre as k-tuplas ordenadas $(u_{i_1},\dots,u_{i_k})$, con $1 \le i_1 < \cdots i_k \le n$. En efecto, se $v_1,\dots,v_k \in V$, tense que $v_j = \sum_{i=1}^n a_i^j u_j$, e polo tanto

$$\begin{aligned}\omega(v_1,\dots,v_k) &= \omega\Big(\sum_{j_1=1}^n a_1^{j_1}\,u_{j_1},\dots,\sum_{j_k=1}^n a_k^{j_k}\,u_{j_k}\Big) = \sum_{1\le j_1,\dots,j_k\le n} a_1^{j_1}\dots a_k^{j_k}\,\omega(u_{j_1},\dots,u_{j_k})\\ &= \sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n}\Big(\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\{i_1,\dots,i_k\}}}\varepsilon(\sigma)\,a_1^{\sigma(i_i)}\dots a_k^{\sigma(i_k)}\Big)\,\omega(u_{i_1},\dots,u_{i_k}),\end{aligned}$$

onde $\mathfrak{S}_{\{i_1,\dots,i_k\}}$ é o grupo de permutacións de $\{i_1,\dots,i_k\}$ para $1\le i_1 <\cdots< i_k \le n$.

Exemplo 3.3. Un exemplo que da un significado xeométrico ás formas é a n-forma linear sobre $\mathbb{R}^n$ definida a partir da base dual da súa base canónica, que está formada polas funcións coordenadas da identidade $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = (r^1,\dots,r^n)$. A aplicación $A\colon \mathbb{R}^n \times \overset{(n)}{\dots} \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ definida por

$$A(v_1,\dots,v_n) = \det\big(r^i(v_j)\big)$$

é multilinear pola linearidade do determinante en cada columna e é antisimétrica por selo o determinante ao intercambiar un par de columnas calquera. Se $v_1,\dots,v_n \in \mathbb{R}^n$ son linearmente independentes, $|A(v_1,\dots,v_n)|$ é, xeometricamente, o volume n-dimensional do paralelepípedo xerado por $v_1,\dots,v_n$.

Definición 3.4. Se $\omega \in \bigwedge^r(V)$ e $\eta \in \bigwedge^s(V)$, defínese o *produto exterior* $\omega\wedge\eta \in \bigwedge^{r+s}(V)$ como:

$$\begin{aligned}(\omega\wedge\eta)(v_1,\dots,v_{r+s}) &= \frac{1}{r!s!}\sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{r+s}}\varepsilon(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(r)})\eta(v_{\sigma(r+1)},\dots,v_{\sigma(r+s)})\\ &= \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}(r,s)}\varepsilon(\sigma)\omega(v_{\sigma(1)},\dots,v_{\sigma(r)})\eta(v_{\sigma(r+1)},\dots,v_{\sigma(r+s)}),\end{aligned}$$

onde

$$\mathfrak{S}(r,s) = \{\sigma \in \underset{r+s}{\mathfrak{S}} \,|1 \le \sigma(1) < \cdots < \sigma(r) \le r+s, 1 \le \sigma(r+1) < \cdots < \sigma(r+s) \le r+s\}.$$

Por exemplo, se $\omega,\eta \in \bigwedge^1(V) = V^*$, tense $(\omega\wedge\eta)(v_1,v_2) = \omega(v_1)\eta(v_2) - \omega(v_2)\eta(v_1)$.

A aplicación produto exterior

$$\begin{aligned}\textstyle\bigwedge^r(V)\times\bigwedge^s(V) &\longrightarrow \textstyle\bigwedge^{r+s}(V)\\ (\omega,\eta) &\longmapsto \omega\wedge\eta\end{aligned}$$

é bilinear. Ademais, verifica:

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega, \qquad \omega \in \textstyle\bigwedge^r(V), \eta \in \bigwedge^s(V),$$
$$(\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta), \qquad \omega \in \textstyle\bigwedge^r(V), \eta \in \bigwedge^s(V), \theta \in \bigwedge^k(V)$$

polo que escribiremos $\omega \wedge \eta \wedge \theta$ sen ambigüidade. En particular, se $\omega^1, \ldots, \omega^k \in V^*$, tense:

$$(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k)(v_1, \ldots, v_k) = \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_k} \varepsilon(\sigma) \omega^1(v_{\sigma(1)}) \ldots \omega^k(v_{\sigma(k)}) = \begin{vmatrix} \omega^1(v_1) & \ldots & \omega^1(v_k) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \omega^k(v_1) & \ldots & \omega^k(v_k) \end{vmatrix}.$$

Se $\tau \in \mathfrak{S}_k$ entón $\omega^{\tau(1)} \wedge \cdots \wedge \omega^{\tau(k)} = \varepsilon(\tau) \omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k$.

Proposición 3.5. *Sexa $\{u_1, \ldots, u_n\}$ unha base do espazo vectorial real V e $\{\alpha^1, \ldots, \alpha^n\}$ a súa base dual. Se $1 \leq k \leq n$ entón $B = \{\alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k} \mid 1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n\}$ é unha base de $\bigwedge^k(V)$, e logo $\dim \bigwedge^k(V) = \binom{n}{k}$. Se $k > n$ entón $\bigwedge^k(V) = 0$.*

Demostración. Imos ver en primeiro lugar que o conxunto B xera $\bigwedge^k(V)$; en efecto, para cada $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ e $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ tense

$$(\alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k})(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}) = \begin{cases} 1 \text{ se } i_1 = j_1, \ldots, i_k = j_k, \\ 0 \text{ noutro caso.} \end{cases}$$

Agora, se $\omega \in \bigwedge^k(V)$ e poñemos $a_{j_1 \ldots j_k} = \omega(u_{j_1}, \ldots, u_{j_k})$, entón

$$\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} a_{j_1 \cdots j_k} \, \alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k}(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}) = a_{i_1 \cdots i_k} = \omega(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}),$$

e polo tanto, pola observación 3.2, tense

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} a_{j_1 \cdots j_k} \, \alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k}.$$

Se $k > n$, como $\omega \in \bigwedge^k(V)$ está determinada pola súa actuación sobre unha k-tupla de elementos da base, e como algún deles debe repetirse, pola antisimetría de ω séguese que $\omega = 0$; así pois, $\bigwedge^k(V) = 0$.

Para probar que B é un conxunto linearmente independente consideramos $\binom{n}{k}$ números reais $a_{j_1 \ldots j_k} \in \mathbb{R}$, con $1 \leq j_1 < \cdots j_k \leq n$, tales que $\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} a_{j_1 \cdots j_k} \, \alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k} = 0$. Se $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$ entón

$$0 = \Big(\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} a_{j_1 \cdots j_k} \, \alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k} \Big)(u_{i_1}, \ldots, u_{i_k}) = a_{i_1 \cdots i_k},$$

é dicir, $a_{i_1 \cdots i_k} = 0$ para cada $1 \leq i_1 < \cdots < i_k \leq n$. □

Corolario 3.6. *Se* $\omega \in \bigwedge^k(V)$, $1 \leq k \leq n$, *entón*

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} a_{j_1 \cdots j_k}\, \alpha^{j_1} \wedge \cdots \wedge \alpha^{j_k},$$

onde $a_{j_1 \cdots j_k} = \omega(u_{j_1}, \ldots, u_{j_k})$.

Definición 3.7. A *álxebra exterior* ou *álxebra de Grassmann* sobre o espazo vectorial real n-dimensional V é o espazo vectorial suma directa

$$\bigwedge(V) = \bigoplus_{k=0}^{\infty} \bigwedge^k(V) = \mathbb{R} \oplus V^* \oplus \bigwedge^2(V) \oplus \cdots \bigwedge^n(V),$$

co produto exterior $\bigwedge(V) \times \bigwedge(V) \xrightarrow{\wedge} \bigwedge(V)$ obtido ao estender o produto exterior $\bigwedge^r(V) \times \bigwedge^s(V) \to \bigwedge^{r+s}(V)$ por bilinearidade, de maneira que se verifique a lei distributiva, é dicir, se $\omega = \sum_{r=0}^n \omega_r$ e $\eta = \sum_{s=0}^n \eta_s$ entón

$$\omega \wedge \eta = \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{r+s=k} \omega_r \wedge \eta_s \Big).$$

3.2. Fibrados exteriores

Os exemplos máis importantes de 1-formas lineares asociadas ás variedades diferenciables son as diferenciais nun punto das funcións diferenciables reais definidas na variedade (ou soamente nunha veciñanza aberta do punto).

Definición 3.8. Sexa M una variedade diferenciable, $p \in M$ e U unha veciñanza aberta de p. Se $f \in \mathcal{F}(U)$, a *diferencial de* f *en* p é a aplicación

$$\begin{aligned} (df)_p \colon T_p(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto (df)_p(v) := v(f), \end{aligned}$$

a cal é linear, é dicir $(df)_p$ é unha forma linear de grao 1 sobre $T_p(M)$ ou unha 1-*forma linear en* p (tamén chamada *vector cotanxente a* M *en* p),

$$(df)_p \in T_p^*(M) = \bigwedge^1(T_p(M)).$$

- **3.9. O fibrado cotanxente** $\tau_M^* = (T^*(M), \pi^*, M, (\mathbb{R}^n)^*)$

Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión n e $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha \in A}$ un atlas de M, onde $\varphi_\alpha = (x_\alpha^1, \ldots, x_\alpha^n)$. Asignamos a cada $p \in M$ o *espazo cotanxente* $T_p^*(M)$, e consideramos a unión disxunta $T^*(M) = \bigsqcup_{p \in M} T_p^*(M)$. Sexa $\pi^* \colon T^*(M) \to M$ a aplicación que fai corresponder a cada $\omega \in T_p^*(M)$ o punto $\pi^*(\omega) = p \in M$. Consideramos a base $\{r^1, \dots, r^n\}$ de $(\mathbb{R}^n)^*$ formada polas proxeccións $\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, dual da base canónica $\{e_1, \dots, e_n\}$ de $\mathbb{R}^n$.

Dado $\alpha \in A$, se $p \in U_\alpha$, cada x_α^j é unha función diferenciable na veciñanza aberta U_α de p, logo $(dx_\alpha^j)_p \in T_p^*(M)$ e temos un isomorfismo $(h_\alpha^*)_p \colon (\mathbb{R}^n)^* \to T_p^*(M)$ dado por

$$(h_\alpha^*)_p(r^j) = (dx_\alpha^j)_p,$$

entón

$$\big((h_\beta^*)_p^{-1} \circ (h_\alpha^*)_p\big)(r^j) = \sum_{i=1}^n \Big(\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i}\Big)_p r^i,$$

e, polo tanto, para cada $\gamma = \sum_{j=1}^n c_j r^j \in (\mathbb{R}^n)^*$,

$$\big((h_\beta^*)_p^{-1} \circ (h_\alpha^*)_p\big)(\gamma) = \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n c_j \Big(\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^i}\Big)_p\Big) r^i.$$

Así, a aplicación $h_{\beta\alpha}^* \colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times (\mathbb{R}^n)^* \to (\mathbb{R}^n)^*$ que corresponde a $h_{\beta\alpha}$ no corolario 2.7 está definida por

$$h_{\beta\alpha}^*(p, \sum_{j=1}^n c_j r^j) = \sum_{i=1}^n \Big(\sum_{j=1}^n c_j \Big(\frac{\partial x_\alpha^j}{\partial x_\beta^1}\Big)_p\Big) r^i = \big(D(\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1})(\varphi_\beta(p))\big)^t (c_1, \cdots, c_n)$$

en termos da base $\{r^1, \dots, r^n\}$ de $(\mathbb{R}^n)^*$, e polo tanto é diferenciable.

Como consecuencia, $T^*(M)$ ten unha única estrutura de variedade diferenciable tal que é o espazo total do *fibrado cotanxente* $\tau_M^* = (T^*(M), \pi^*, M, (\mathbb{R}^n)^*)$, o cal é un espazo fibrado vectorial tal que se $h_\alpha^* \colon U_\alpha \times (\mathbb{R}^n)^* \to \pi^{*-1}(U_\alpha)$ está dado por

$$h_\alpha^*\Big(p, \sum_{j=1}^n c_j r^j\Big) = \sum_{j=1}^n c_j (dx_\alpha^j)_p,$$

entón $\{(U_\alpha, h_\alpha^*)\}_{\alpha \in A}$ é un atlas fibrado vectorial. O atlas correspondente da variedade diferenciable $T^*(M)$ (véxase a observación 2.8, onde agora $\psi : (\mathbb{R}^n)^* \to \mathbb{R}^n$ está definido por $\psi(r^j) = e_j$ para $j = 1, \dots, n$), é $\widetilde{\mathfrak{a}}^* = \big\{\big(\pi^{*-1}(U_\alpha), \varphi_\alpha^*\big) \bigm| \alpha \in A\big\}$, onde

$$\begin{aligned} \varphi_\alpha^* \colon \pi^{*-1}(U_\alpha) &\longrightarrow \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^n \\ \sum_{i=1}^n c_j (dx_\alpha^j)_p &\longmapsto (x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p), c_1, \dots, c_n), \end{aligned}$$

é dicir, se $\gamma \in T_p^*(M)$, $p \in U_\alpha$, entón

$$\varphi_\alpha^*(\gamma) = \big(x_\alpha^1(p), \dots, x_\alpha^n(p), \gamma\big(\partial_{x_\alpha^1}\big)_p, \dots, \gamma\big(\partial_{x_\alpha^n}\big)_p\big),$$

e a súa aplicación inversa está dada por

$$\begin{aligned} {\varphi^*}_\alpha^{-1}\colon \varphi_\alpha(U_\alpha)\times\mathbb{R}^n &\longrightarrow {\pi^*}^{-1}(U_\alpha) \\ (x,c) &\longmapsto \sum_{j=1}^n c_j (dx_\alpha^j)_{\varphi_\alpha^{-1}(x)}\,. \end{aligned}$$

• 3.10. O fibrado exterior $\lambda_M^k = (\bigwedge^k T(M), \pi^k, M, \bigwedge^k(\mathbb{R}^n))$

Se M é unha variedade diferenciable de dimensión n asignamos a cada punto $p\in M$ o espazo vectorial $\bigwedge^k\big(T_p(M)\big)$ das k-formas lineares sobre $T_p(M)$ (ou *k-formas lineares en p*), e consideramos a unión disxunta

$$\textstyle\bigwedge^k T(M) = \bigsqcup_{p\in M} \bigwedge^k\big(T_p(M)\big).$$

Sexa $\pi^k\colon \bigwedge^k T(M)\to M$ a aplicación definida por $\pi^k(\omega)=p$ se $\omega\in\bigwedge^k\big(T_p(M)\big)$ e sexa $\mathcal{A}=\{(U_\alpha,\varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ un atlas de M, con $\varphi_\alpha=(x_\alpha^1,\dots,x_\alpha^n)$.

Se $\{r^1,\dots,r^n\}$ é a base de $(\mathbb{R}^n)^*$ dual da base canónica de $\mathbb{R}^n$ entón

$$\{r^{j_1}\wedge\cdots\wedge r^{j_k} \mid 1\le j_1<\cdots<j_k\le n\}$$

é unha base de $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$, para $1\le k\le n$.

Para cada $\alpha\in A$ e cada $p\in U_\alpha$ temos un isomorfismo

$$(h_\alpha^k)_p\colon \textstyle\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)\to\bigwedge^k(T_p(M))$$

dado por

$$(h_\alpha^k)_p(r^{j_1}\wedge\cdots\wedge r^{j_k}) = (dx_\alpha^{j_1})_p\wedge\cdots\wedge(dx_\alpha^{j_k})_p,$$

e tense

$$\begin{aligned} &\big((h_\beta^k)_p^{-1}\circ(h_\alpha^k)_p\big)(r^{j_1}\wedge\cdots\wedge r^{j_k}) \\ &\quad= \sum_{i_1<\cdots<i_k}\ \sum_{\sigma\in\mathfrak{S}_{\{i_1,\dots,i_k\}}} \varepsilon(\sigma)\left(\frac{\partial x_\alpha^{j_1}}{\partial x_\beta^{\sigma(i_1)}}\right)_p\cdots\left(\frac{\partial x_\alpha^{j_k}}{\partial x_\beta^{\sigma(i_k)}}\right)_p r^{i_1}\wedge\cdots\wedge r^{i_k}, \end{aligned}$$

o que da, para cada $p\in U_\alpha\cap U_\beta$, a imaxe por $(h_\beta^k)_p^{-1}\circ(h_\alpha^k)_p$ de cada elemento de $\bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned} &\big((h_\beta^k)_p^{-1}\circ(h_\alpha^k)_p\big)\Big(\sum_{j_1<\cdots<j_k} c_{j_1\dots j_k}\, r^{j_1}\wedge\cdots\wedge r^{j_k}\Big) \\ &= \sum_{i_1<\cdots<i_k}\left(\sum_\sigma \varepsilon(\sigma)\left\{\sum_{j_1<\cdots<j_k} c_{j_1\dots j_k}\left(\frac{\partial x_\alpha^{j_1}}{\partial x_\beta^{\sigma(i_1)}}\right)_p\cdots\left(\frac{\partial x_\alpha^{j_k}}{\partial x_\beta^{\sigma(i_k)}}\right)_p\right\}\right) r^{i_1}\wedge\cdots\wedge r^{i_k}, \end{aligned}$$

onde, para cada $1 \leq i_1 < \dots i_k \leq n$, σ percorre o grupo de permutacións $\mathfrak{S}_{\{i_1,\dots,i_k\}}$. Así, a aplicación

$$h^k_{\beta\alpha}\colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times \bigwedge^k(\mathbb{R}^n) \to \bigwedge^k(\mathbb{R}^n),$$

dada por $h^k_{\beta\alpha}(p,\gamma) = \big((h^k_\beta)^{-1}_p \circ (h^k_\alpha)_p\big)(\gamma)$ para cada $\gamma \in \bigwedge^k(\mathbb{R}^n)$, é diferenciable. Polo corolario 2.7, $\bigwedge^k T(M)$ ten unha única estrutura de variedade diferenciable coa que é o espazo total dun espazo fibrado vectorial sobre M que é o *fibrado exterior de grao* k, $\lambda^k_M = (\bigwedge^k T(M), \pi^k, M, \bigwedge^k(\mathbb{R}^n))$, para a que $\{(U_\alpha, h^k_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ é un atlas fibrado vectorial, onde

$$h^k_\alpha\colon U_\alpha \times \bigwedge^k(\mathbb{R}^n) \to (\pi^k)^{-1}(U_\alpha)$$

está dado por

$$h^k_\alpha\Big(p, \sum_{j_1<\dots<j_k} c_{j_1\dots j_k}\, r^{j_1}\wedge\dots\wedge r^{j_k}\Big) = \sum_{j_1<\dots<j_k} c_{j_1\dots j_k}\, (dx^{j_1}_\alpha)_p \wedge\dots\wedge (dx^{j_k}_\alpha)_p.$$

Consideramos o isomorfismo $\psi\colon \bigwedge^k(\mathbb{R}^n) \to \mathbb{R}^{\binom{n}{k}}$ dado por

$$\psi\Big(\sum_{1\leq j_1<\dots<j_k\leq n} c_{j_1\dots j_k}\, r^{j_1}\wedge\dots\wedge r^{j_k}\Big) = \big(c_{j_1\dots j_k}\big)_{1\leq j_1<\dots<j_k\leq n}.$$

O atlas da variedade diferenciable $\bigwedge^k T(M)$ que está definido polo atlas fibrado vectorial $\{(U_\alpha, h^k_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ é $\widetilde{\mathfrak{a}}_k = \Big\{\big((\pi^k)^{-1}(U_\alpha), \varphi^k_\alpha\big) \mid \alpha \in A\Big\}$, onde

$$\begin{aligned} \varphi^k_\alpha\colon (\pi^k)^{-1}(U_\alpha) &\longrightarrow \varphi^k_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} \\ \sum_{1\leq j_1<\dots<j_k\leq n} c_{j_1\dots j_k}\, (dx^{j_1}_\alpha)_p \wedge\dots\wedge (dx^{j_k}_\alpha)_p &\longmapsto \big(x^1_\alpha(p),\dots,x^k_\alpha(p), \big(c_{j_1\dots j_k}\big)_{1\leq j_1<\dots<j_k\leq n}\big), \end{aligned}$$

é dicir, se $\gamma \in \bigwedge^k(T_p(M))$, $p \in U_\alpha$, entón

$$\varphi^k_\alpha(\gamma) = \Big(x^1_\alpha(p),\dots,x^k_\alpha(p), \Big(\gamma\big((\partial_{x^{j_1}_\alpha})_p,\dots,(\partial_{x^{j_k}_\alpha})_p\big)\Big)_{1\leq j_1<\dots<j_k\leq n}\Big).$$

A súa aplicación inversa é

$$\begin{aligned} (\varphi^k)^{-1}_\alpha\colon \varphi^k_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^{\binom{n}{k}} &\longrightarrow (\pi^k)^{-1}(U_\alpha) \\ \big(x, \big(c_{j_1\dots j_k}\big)_{j_1<\dots<j_k}\big) &\longmapsto \sum_{j_1<\dots<j_k} c_{j_1\dots j_k}\, (dx^{j_1}_\alpha)_{\varphi_\alpha^{-1}(x)} \wedge\dots\wedge (dx^{j_k}_\alpha)_{\varphi_\alpha^{-1}(x)}. \end{aligned}$$

Obsérvese que $\bigwedge^1 T(M) = T^*(M)$ e $\lambda^1_M = \tau^*_M$.

Observación 3.11. Por convención, o *fibrado exterior de grao* 0 sobre M é o fibrado vectorial produto $\mu^{\mathbb{R}}_M = (M\times\mathbb{R}, \mathrm{pr}_1, M, \mathbb{R})$ (véxase o exemplo 2.4), é dicir,

$$\bigwedge^0 T(M) = \bigcup_{p\in M} \{p\}\times\mathbb{R} = M\times\mathbb{R}, \qquad \lambda^0_M = \mu^{\mathbb{R}}_M.$$

• **3.12.** (*Suma de Whitney de espazos fibrados vectoriais*)

Se $\xi = (E, \pi, M, F)$ e $\xi' = (E', \pi', M, F')$ son dous espazos fibrados vectoriais, podemos supoñer que teñen atlas fibrados vectoriais cos mesmos abertos de trivialidade considerando un refinamento común dos abertos de trivialidade de dous atlas de ξ e ξ'. Sexan $\{(U_\alpha, h_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ e $\{(U_\alpha, h'_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ dous destes atlas fibrados de ξ e ξ', respectivamente.

Asignamos a cada $p \in M$ o espazo vectorial $E_p \oplus E'_p$. Se $p \in U_\alpha$, téñense isomorfismos $(h_\alpha)_p \colon F \to E_p$ e $(h'_\alpha)_p \colon F' \to E'_p$, que dan lugar ao isomorfismo

$$(\tilde{h}_\alpha)_p = (h_\alpha)_p \oplus (h'_\alpha)_p \colon F \oplus F' \longrightarrow E_p \oplus E'_p\,,$$

e se $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, a aplicación

$$\tilde{h}_{\beta\alpha} \colon (U_\alpha \cap U_\beta) \times (F \oplus F') \longrightarrow F \oplus F'$$

dada por

$$\begin{aligned}\tilde{h}_{\beta\alpha}(p, (z, z')) &= \big((\tilde{h}_\beta)_p^{-1} \circ (\tilde{h}_\alpha)_p\big)(z, z') \\ &= \Big(\big((h_\beta)_p^{-1} \circ (h_\alpha)_p\big)(z), \big((h'_\beta)_p^{-1} \circ (h'_\alpha)_p\big)(z')\Big)\end{aligned}$$

é diferenciable. Polo corolario 2.7, na unión disxunta

$$E \oplus E' = \bigsqcup_{p\in M} (E_p \oplus E'_p)$$

existe unha única estrutura de variedade diferenciable tal que se $\tilde{\pi} \colon E \oplus E' \to M$ é a aplicación dada por $\tilde{\pi}(y, y') = p$ se $(y, y') \in E_p \oplus E'_p$, entón $\xi \oplus \xi' = (E \oplus E', \tilde{\pi}, M, F \oplus F')$ é un espazo fibrado vectorial con atlas fibrado vectorial $\{(U_\alpha, \tilde{h}_\alpha)\}_{\alpha\in A}$, onde

$$\begin{aligned}\tilde{h}_\alpha \colon U_\alpha \times (F \oplus F') &\longrightarrow \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) \\ (p, (z, z')) &\longmapsto \tilde{h}_\alpha(p, (z, z')) = \big((h_\alpha)_p(z), (h'_\alpha)_p(z')\big).\end{aligned}$$

Dise que $\xi \oplus \xi'$ é a *suma de Whitney dos espazos fibrados vectoriais* ξ *e* ξ'. Se ξ e ξ' teñen rango k e k', respectivamente, entón o fibrado vectorial $\xi \oplus \xi'$ ten rango $k + k'$.

Ademais, de acordo coa observación 2.8, se $\mathcal{A} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}_{\alpha\in A}$ é un atlas da variedade diferenciable M tal que os seus abertos coordenados coinciden cos abertos de trivialidade dos atlas fibrados vectoriais considerados en ξ e ξ', e supoñemos que $\psi \colon F \to \mathbb{R}^k$ e $\psi' \colon F' \to \mathbb{R}^{k'}$ son isomorfismos, entón un atlas da variedade diferenciable $E \oplus E'$ sería a familia

$$\tilde{\mathcal{A}} = \big\{\big(\tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha), \tilde{\varphi}_\alpha\big) \;\big|\; \alpha \in A\big\}\,,$$

onde $\tilde{\varphi}_\alpha \colon \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha) \to \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'} \subset \mathbb{R}^{n+k+k'}$ está dado por

$$\tilde{\varphi}_\alpha(y, y') = \big(\varphi_\alpha \times (\psi \times \psi')\big)\big(\tilde{h}_\alpha^{-1}(y, y')\big) = \big(\varphi_\alpha(p), \psi((h_\alpha)_p^{-1}(y)), \psi'((h'_\alpha)_p^{-1}(y)\big),$$

con $p = \pi_(y) = \pi'(y')$. A súa inversa $\tilde{\varphi}_\alpha^{-1} \colon \varphi_\alpha(U_\alpha) \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{k'} \to \tilde{\pi}^{-1}(U_\alpha)$ está dada por

$$\begin{aligned}\tilde{\varphi}_\alpha^{-1}(x, a, a') &= \tilde{h}_\alpha(\varphi_\alpha^{-1}(x), \psi^{-1}(a), \psi'^{-1}(a')) \\ &= \big((h_\alpha)_{\varphi_\alpha^{-1}(x)}(\psi^{-1}(a)), (h'_\alpha)_{\varphi_\alpha^{-1}(x)}(\psi'^{-1}(a'))\big) \in E_{\varphi_\alpha^{-1}(x)} \oplus E'_{\varphi_\alpha^{-1}(x)}.\end{aligned}$$

É obvio que a construción anterior se pode xeneralizar á suma de Whitney dun número finito de espazos fibrados vectoriais $\xi_1, \dots, \xi_r$ sobre M, de rangos $k_1, \dots, k_r$, respectivamente. A súa suma de Whitney é un espazo fibrado vectorial $\xi_1 \oplus \cdots \oplus \xi_r$ sobre M de rango $k_1 + \cdots + k_r$.

• **3.13. O fibrado álxebra exterior** $\lambda_M = \big(\bigwedge T(M), \hat{\pi}, M, \bigwedge(\mathbb{R}^n)\big)$

O *fibrado álxebra exterior* dunha variedade diferenciable M de dimensión n é a suma de Whitney

$$\lambda_M = \lambda_M^0 \oplus \lambda_M^1 \oplus \cdots \oplus \lambda_M^n.$$

O seu espazo total é

$$\begin{aligned}\textstyle\bigwedge(M) &= \textstyle\bigwedge^0 T(M) \oplus \bigwedge^1 T(M) \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n T(M) \\ &= (M \times \mathbb{R}) \oplus T^*(M) \oplus \textstyle\bigwedge^2 T(M) \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n T(M)\end{aligned}$$

e a súa fibra típica é

$$\begin{aligned}\textstyle\bigwedge(\mathbb{R}^n) &= \textstyle\bigwedge^0(\mathbb{R}^n) \oplus \bigwedge^1(\mathbb{R}^n) \oplus \bigwedge^2(\mathbb{R}^n) \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n(\mathbb{R}^n) \\ &= \mathbb{R} \oplus (\mathbb{R}^n)^* \oplus \textstyle\bigwedge^2(\mathbb{R}^n) \oplus \cdots \oplus \bigwedge^n(\mathbb{R}^n).\end{aligned}$$

λ_M é un fibrado vectorial sobre M de rango $\binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \dots \binom{n}{n} = 2^n$.

3.3. Formas diferenciais sobre variedades

Definición 3.14. Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión n. Unha *forma de grao k* (ou *k-forma*) sobre M é unha aplicación que asigna a cada punto $p \in M$ unha k-forma linear en p, isto é, unha sección da la proxección $\pi^k \colon \bigwedge^k T(M) \to M$,

$$\begin{aligned}\omega \colon M &\longrightarrow \textstyle\bigwedge^k T(M) \\ p &\longmapsto \omega_p \in \textstyle\bigwedge^k\big(T_p(M)\big).\end{aligned}$$

En particular, unha 1-forma sobre M é unha sección da proxección do fibrado cotanxente $\pi^* \colon T^*(M) \to M$,

$$\begin{aligned}\omega \colon M &\longrightarrow T^*(M) \\ p &\longmapsto \omega_p \in T_p^*(M).\end{aligned}$$

Unha *forma diferencial de grao k* (ou *k-forma diferencial*) sobre M é unha k-forma $\omega \colon M \to \bigwedge^k T(M)$ que é diferenciable como aplicación entre variedades diferenciables.

Definición 3.15. Se M é unha variedade diferenciable e $f \in \mathcal{F}(M)$, a *diferencial* de f é a 1-forma sobre M dada por

$$\begin{aligned} df\colon M &\longrightarrow T^*(M) \\ p &\longmapsto (df)_p \in T_p^*(M). \end{aligned}$$

• **3.16.** (*Expresión local dunha k-forma*)

Sexa (U,φ) unha carta da variedade diferenciable M de dimensión n, $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$. Para $i = 1,\dots,n$ e para cada $p \in U$, $x^i \in \mathcal{F}(U)$, temos as 1-formas lineares en p,

$$\begin{aligned} (dx^i)_p\colon T_p(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ v &\longmapsto (dx^i)_p(v) = v(x^i), \end{aligned}$$

e $\{(dx^1)_p,\dots,(dx^n)_p\}$ é a base de $T_p^*(M)$ dual da base $\{(\partial_{x^1})_p,\dots,(\partial_{x^n})_p\}$ de $T_p(M)$. Polo tanto, se $1 \le k \le n$, $\{(dx^{j_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{j_k})_p \mid 1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n\}$ é unha base de $\bigwedge^k\big(T_p(M)\big)$, pola proposición 3.5. Se ω é unha k-forma sobre M, para cada $p \in U$ pódese escribir

$$\omega_p = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} a_{j_1\cdots j_k}(p)\,(dx^{j_1})_p \wedge \cdots \wedge (dx^{j_k})_p,$$

e as funcións $a_{j_1\cdots j_k}\colon U \to \mathbb{R}$ dise que son as *compoñentes* de ω en (U,φ). Ademais, tense

$$a_{j_1\cdots j_k}(p) = \omega_p\big((\partial_{x^{j_1}})_p,\dots,(\partial_{x^{j_k}})_p\big).$$

A expresión

$$\omega_{|U} = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} a_{j_1\cdots j_k}\,dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}$$

chámase a *expresión local* da k-forma ω en (U,φ).

Teorema 3.17. *Se ω é unha k-forma sobre unha variedade diferenciable M, as seguintes condicións son equivalentes:*

(1) *ω é unha k-forma diferencial.*

(2) *Para cada carta (U,φ) de M, as compoñentes de ω respecto de (U,φ) son funcións diferenciables.*

(3) *Para cada punto $p \in M$, existe unha carta (U,φ), $p \in U$, tal que as compoñentes de ω en (U,φ) son funcións diferenciables.*

Demostración. Como xa temos visto en 3.10, cada carta (U,φ) de M, onde $\varphi=(x^1,\dots,x^n)$, define unha carta $\big((\pi^k)^{-1}(U),\varphi^k\big)$ de $\bigwedge^k T(M)$ tal que

$$\begin{aligned}\varphi^k\colon (\pi^k)^{-1}(U) &\longrightarrow \varphi^k_\alpha(U)\times\mathbb{R}^{\binom{n}{k}}\\ \sum_{j_1<\dots<j_k} c_{j_1\dots j_k}\,(dx^{j_1})_q\wedge\dots\wedge(dx^{j_k})_q &\longmapsto \big(x^1(q),\dots,x^k(q),\big(c_{j_1\dots j_k}\big)_{j_1<\dots<j_k}\big).\end{aligned}$$

Se ω é unha k-forma sobre M e a súa expresión local en (U,φ) é

$$\omega_{|U}=\sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n} a_{j_1\cdots j_k}\,dx^{j_1}\wedge\dots\wedge dx^{j_k},$$

e como sección de $\pi^k\colon\bigwedge^k T(M)\to M$ é

$$\begin{aligned}\omega_{|U}\colon U &\longrightarrow (\pi^k)^{-1}(U)\subset \textstyle\bigwedge^k T(M)\\ q &\longmapsto \omega_q=\sum_{1\le j_1<\dots<j_k\le n} a_{j_1\cdots j_k}(q)\,(dx^{j_1})_q\wedge\dots\wedge(dx^{j_k})_q.\end{aligned}$$

Polo tanto, a expresión local $\varphi^k\circ\omega\circ\varphi^{-1}$ de ω como aplicación de U en $(\pi^k)^{-1}(U)$ é C^∞ se, e só se, tamén o é a aplicación

$$x\in\varphi(U)\longmapsto \big(a_{j_1\dots j_k}(\varphi^{-1}(x))\big)_{j_1<\dots<j_k}\in\mathbb{R}^{\binom{n}{k}},$$

que é o mesmo que dicir que as compoñentes $a_{j_1\dots j_k}$ de ω en (U,φ) son funcións diferenciables. Séguense de forma inmediata as equivalencias. □

• **3.18.** (*A diferencial dunha función*)

Se $f\in\mathcal{F}(M)$ entón a 1-forma df sobre M na definición 3.15, nunha carta (U,φ) de M, con $\varphi=(x^1,\dots,x^n)$, é tal que $(df)_p=\sum_{j=1}^n(\partial f/\partial x^j)_p\,(dx^j)_p$ para cada $p\in U$ xa que $(df)_p=\sum_{j=1}^n a_j(p)(dx^j)_p$, onde $a_j(p)=(df)_p\big(\partial_{x^j}\big)_p=\big(\partial_{x^j}\big)_p(f)=(\partial f/\partial x^j)_p$. Logo, a expresión local de df en (U,φ) é

$$(df)_{|U}=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^j}\,dx^j,$$

e cada compoñente

$$\frac{\partial f}{\partial x^j}=D_j(f\circ\varphi^{-1})\circ\varphi\colon U\longrightarrow\mathbb{R}$$

é diferenciable. Polo teorema 3.17, df é una 1-forma diferencial sobre M

Proposición 3.19 (Propiedade de extensión local de formas diferenciais)**.** *Sexa M unha variedade diferenciable, W un aberto en M, $p\in W$, e α unha k-forma diferencial sobre W. Entón existe unha veciñanza aberta V de p, $\overline{V}\subset W$, e existe unha forma diferencial de grao k sobre M tal que $\omega_{|V}=\alpha_{|V}$.*

Demostración. Pola propiedade de extensión local de funcións diferenciables (corolario 1.11) para a función constante $1\colon W \to \mathbb{R}$, pódense atopar unha veciñanza aberta V de p tal que $\overline{V}$ é un compacto contido en W e unha función $f \in \mathcal{F}(M)$ tal que $f_{|\overline{V}} = 1$ e $\operatorname{sop} f \subset W$. Se poñemos

$$\begin{aligned} \omega\colon M &\longrightarrow \textstyle\bigwedge^k T(M) \\ q &\longmapsto \begin{cases} f(q)\alpha_q & \text{se} \quad q \in W, \\ 0_q & \text{se} \quad q \notin W, \end{cases} \end{aligned}$$

a k-forma ω é diferenciable, por selo a súa restrición aos abertos W e $M \setminus \operatorname{sop} f$, e ademais $\omega_{|V} = f_{|V}\alpha_{|V} = \alpha_{|V}$. □

• **3.20.** Se M é unha variedade diferenciable, denotaremos por $\mathcal{E}^k(M)$ o conxunto das formas diferenciais de grao k sobre M. Se $\omega, \eta \in \mathcal{E}^k(M)$, $\lambda \in \mathbb{R}$, e $h \in \mathcal{F}(M)$, defínense as k-formas

$$\omega + \eta,\ \lambda\,\omega,\ h\,\omega\colon M \to \textstyle\bigwedge^k T(M)$$

por

$$(\omega + \eta)_p := \omega_p + \eta_p\,, \quad (\lambda\,\omega)_p := \lambda\,\omega_p\,, \quad (h\,\omega)_p := h(p)\,\omega_p\,,$$

e $\omega + \eta$, $\lambda\,\omega$, $h\,\omega \in \mathcal{E}^k(M)$. A k-forma $0\colon M \to \bigwedge^k T(M)$, que asigna a cada $p \in M$ a k-forma linear nula en p, tamén é unha forma diferencial de grao k sobre M. O conxunto $\mathcal{E}^k(M)$ ten estrutura de espazo vectorial real e de $\mathcal{F}(M)$-módulo. Se $k > n$ entón $\mathcal{E}^k(M) = 0$. Ademais, as seccións diferenciables da proxección do fibrado exterior de grao 0 (ver a observación 3.11) $\lambda^0_M = (\bigwedge^0 T(M) = M \times \mathbb{R}, \mathrm{pr}_1, M, \mathbb{R})$ identifícanse trivialmente coas funcións diferenciables reais definidas en M, así que poñemos $\mathcal{E}^0(M) = \mathcal{F}(M)$.

Se $\omega \in \mathcal{E}^r(M)$, $\eta \in \mathcal{E}^s(M)$, $r, s \geq 1$, o *produto exterior* de ω e η é

$$\begin{aligned} \omega \wedge \eta\colon M &\longrightarrow \textstyle\bigwedge^{r+s} T(M) \\ p &\longmapsto (\omega \wedge \eta)_p := \omega_p \wedge \eta_p \in \textstyle\bigwedge^{r+s}\big(T_p(M)\big)\,. \end{aligned}$$

Se $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$, $h, g \in \mathcal{E}^0(M) = \mathcal{F}(M)$, poñemos

$$h \wedge \omega := h\,\omega =: \omega \wedge h\,, \qquad h \wedge g := h\,g\,.$$

Para cada $r, s \geq 0$ tense a *operación produto exterior*

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^r(M) \times \mathcal{E}^s(M) &\longrightarrow \mathcal{E}^{r+s}(M) \\ (\omega, \eta) &\longmapsto \omega \wedge \eta\,, \end{aligned}$$

que é $\mathcal{F}(M)$-bilinear e verifica:

$$\omega \wedge \eta = (-1)^{rs}\eta \wedge \omega, \qquad (\omega \wedge \eta) \wedge \theta = \omega \wedge (\eta \wedge \theta),$$

para $\omega \in \mathcal{E}^r(M)$, $\eta \in \mathcal{E}^s(M)$, $\theta \in \mathcal{E}^l(M)$, $r, s, l \geq 0$.

Teorema 3.21. *Unha forma diferencial* $\omega\colon M \to \bigwedge^k T(M)$ *de grao* $k \geq 1$ *sobre* M *pódese interpretar como unha aplicación* $\mathcal{F}(M)$*-multilinear e antisimétrica*

$$\omega\colon \mathfrak{X}(M) \times \overset{(k)}{\cdots} \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

a través de

$$\omega(X_1, \dots, X_n)(p) := \omega_p\left((X_1)_p, \dots, (X_n)_p\right), \qquad p \in M.$$

Demostración. Do feito de que cada $\omega_p \in \bigwedge^k\big(T_p(M)\big)$ é multilinear e antisimétrica séguese inmediatamente que $\omega\colon \mathfrak{X}(M) \times \overset{(k)}{\cdots} \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ é

(1) $\mathcal{F}(M)$-multilinear:

$$\omega(X_1, \dots, f\, X_i + g\, X_i', \dots, X_k) = f\,\omega(X_1, \dots, X_i, \dots, X_k) + g\,\omega\,(X_1, \dots, X_i', \dots, X_k),$$

para $X_1, \dots, X_i, X_i', \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, $(i = 1, \dots, k)$, $f, g \in \mathcal{F}(M)$,

(2) antisimétrica:

$$\omega\big(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(k)}\big) = \varepsilon(\sigma)\,\omega(X_1, \dots, X_k), \qquad X_1, \dots, X_k \in \mathfrak{X}(M), \quad \sigma \in \mathfrak{S}_k,$$

Tamén debemos comprobar que $\omega\colon \mathfrak{X}(M) \times \overset{(k)}{\cdots} \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$ está ben definida, é dicir, que se ω é unha k-forma diferencial e $X_1, \dots, X_k$ son campos de vectores diferenciables sobre M entón $\omega(X_1, \dots, X_m)\colon M \to \mathbb{R}$ é unha función diferenciable. Para isto abonda ver que a súa restrición a un aberto coordenado calquera U de M é unha función diferenciable. Consideramos unha carta (U, φ) de M, con $\varphi = (x^1, \dots, x^n)$, e supoñemos que a expresión local de ω en (U, φ) é $\omega_{|U} = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} a_{j_1 \cdots j_k}\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}$, onde $a_{j_1 \cdots j_k} \in \mathcal{F}(U)$, e a expresión local de cada X_r, $1 \leq r \leq n$, é $X_{r|U} = \sum_{i=1}^n \lambda_r^i\, \partial_{x^i}$, onde cada $\lambda_r^i \in \mathcal{F}(U)$. Entón

$$\begin{aligned}
\omega(X_1 \dots, X_k)_{|U} &= \Big(\sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} a_{j_1 \cdots j_k}\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}\Big)\Big(\sum_{i_1=1}^n \lambda_1^{i_1}\, \partial_{x^{i_1}}, \dots, \sum_{i_k=1}^n \lambda_k^{i_k}\, \partial_{x^{i_k}}\Big) \\
&= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \; \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{\{j_1, \dots, j_k\}}} \varepsilon(\sigma)\, a_{j_1 \dots j_k}\, \lambda_1^{\sigma(j_1)} \dots \lambda_k^{\sigma(j_k)} \in \mathcal{F}(U).
\end{aligned}$$

Reciprocamente, supoñamos que ω é unha aplicación $\mathcal{F}(M)$-multilinear e antisimétrica de $\mathfrak{X}(M) \times \overset{(k)}{\cdots} \times \mathfrak{X}(M)$ en $\mathcal{F}(M)$. O punto esencial da demostración consiste en probar que, en cada punto $p \in M$, a función $\omega(X_1, \dots, X_k)$ depende soamente dos valores dos campos de vectores $X_1, \dots, X_k$ no punto p. Para isto chega con ver que se $X_1, \dots, X_k$ son campos de vectores diferenciables sobre M tales que $(X_i)_p = 0$ para algún i entón

$\omega(X_1,\dots,X_k)(p) = 0$, porque daquela, aplicando isto a cada $X_i - Y_i$, se $(X_i - Y_i)_p = 0$ para todo $i = 1,\dots,k$, sería $\omega(X_1 - Y_1, X_2,\dots,X_k)(p) = 0$, etc., e polo tanto

$$(\star) \qquad \begin{aligned} \omega(X_1,\dots,X_k)(p) &= \omega(Y_1, X_2,\dots,X_k(p)) = \omega(Y_1, Y_2, X_3,\dots,,X_k)(p) \\ &= \cdots = \omega(Y_1, Y_2,\dots,Y_k)(p). \end{aligned}$$

Para isto probaremos en primeiro lugar:

(a) Se $X_1,\dots,X_k, Y_1,\dots,Y_k$ son campos de vectores diferenciables sobre M que coinciden nunha veciñanza aberta U de p entón $\omega(X_1,\dots,X_k)$ e $\omega(Y_1,\dots,Y_k)$ coinciden en U.

É suficiente probar que se $X_i \in \mathfrak{X}(M)$ se anula en U entón $\omega(X_1,\dots,X_i,\dots,X_k) = 0$ en U. Por simplicidade probarémolo para $i = 1$. Sexa $q \in U$. Polo teorema de existencia de funcións meseta (teorema 1.10) existe unha veciñanza aberta V de q, con clausura compacta $\overline{V} \subset U$, e existe $f \in \mathcal{F}(M)$ tal que $f_{|V} = 1$ e $\operatorname{sop} f \subset U$, logo $f_{|M\setminus U} = 0$. Se tomamos $g = 1 - f \in \mathcal{F}(M)$, tense $g_{|V} = 0$ e $g_{|M\setminus U} = 1$. Entón $X_1 = gX_1$ e polo tanto

$$\omega(X_1,\dots,X_k) = \omega(gX_1, X_2,\dots,X_k) = g\,\omega(X_1,\dots,X_k),$$

do que se segue que $\omega(X_1,\dots,X_k)(q) = g(q)\,\omega(X_1,\dots,X_k)(q) = 0$, xa que $g(q) = 0$. Isto é válido para cada punto $q \in U$, logo $\omega(X_1,\dots,X_k)_{|U} = 0$.

Probaremos agora a propiedade antes anunciada e, por simplicidade, suporemos de novo que $i = 1$:

(b) Se $X_1 \in \mathfrak{X}(M)$ se anula nun punto $p \in M$ entón $\omega(X_1,\dots,X_k)(p) = 0$.

Sexa (U,φ) unha carta de M, con $\varphi = (x^1,\dots,x^m)$, e supoñamos que a expresión local de X_1 en U é $(X_1)_{|U} = \sum_{j=1}^m \lambda^j\,\partial_{x^j}$, onde $\lambda^j \in \mathcal{F}(U)$. Polas propiedades de extensión local de funcións diferenciables e de campos de vectores diferenciables (1.11 e 2.22), pódense atopar unha veciñanza aberta V de p contida en U, funcións diferenciables $f_j \in \mathcal{F}(M)$ e campos de vectores diferenciables $Z_j \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $f_{j|V} = \lambda^j{}_{|V}$ e $Z_{j|V} = (\partial_{x^j})_{|V}$. Entón

$$X_1' = \sum_{j=1}^n f_j Z_j \in \mathfrak{X}(M)$$

é tal que $X'_{1|V} = X_{1|V}$. Se empregamos a propiedade (a) de enriba, séguese

$$\omega(X_1, X_2,\dots,X_k)(p) = \omega(X_1', X_2,\dots,X_k)(p) = \sum_{j=1}^n f_j(p)\,\omega(Z_j, X_2,\dots,X_k)(p) = 0,$$

xa que $f_j(p) = \lambda^j(p) = 0$ para todo $j = 1,\dots,n$, por ser $(X_1)_p = 0$.

Como consecuencia, temos as igualdades $(\star)$, é dicir: Se $(X_1,\dots,X_k), (Y_1,\dots,Y_k)$ pertencen a $\mathfrak{X}(M) \times \overset{(k)}{\cdots} \times \mathfrak{X}(M)$ e son tales que $(X_i)_p = (Y_i)_p$ para todo $i = 1,\dots,k$, entón

$\omega(X_1,\dots,X_k)(p) = \omega(Y_1,Y_2,\dots,Y_k)(p)$. Isto, xunto con 2.22, fai que estea ben definida a k-forma

$$\begin{aligned} \omega\colon M &\longrightarrow \textstyle\bigwedge^k T(M) \\ p &\longmapsto \omega_p \in \textstyle\bigwedge^k\big(T_p(M)\big)\,, \end{aligned}$$

onde, para cada $p \in M$,

$$\begin{aligned} \omega_p\colon T_p(M)\times \overset{(k)}{\cdots} \times T_p(M) &\longrightarrow \mathbb{R} \\ (v_1,\dots,v_k) &\longmapsto \omega_p(v_1,\dots,v_k) = \omega(X_1,\dots,X_k)(p), \end{aligned}$$

sendo $X_1,\dots,X_k$ campos de vectores diferenciables sobre M tales que $(X_i)_p = v_i$ para cada $i = 1,\dots,k$.

Imos ver finalmente que ω é diferenciable, para o que consideramos a expresión local de ω nunha carta (U,φ) de M, con $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$,

$$\omega_{|U} = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} a_{j_1\cdots j_k}\, dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}.$$

Debemos comprobar que as compoñentes $a_{j_1\cdots j_k}$ son funcións diferenciables en U, para o que veremos que o son nunha veciñanza aberta de cada punto $p \in U$. Agora, por 2.22, existe unha veciñanza aberta V de p contida en U e campos de vectores diferenciables $X_j \in \mathfrak{X}(M)$ tales que $X_{j|V} = (\partial_{x^j})_{|V}$. Entón, para todo $q \in V$, tense

$$a_{j_1\cdots j_k}(q) = \omega_q\big(\big(\partial_{x^{j_1}}\big)_q,\dots,\big(\partial_{x^{j_k}}\big)_q\big)\big) = \omega(X_{j_1},\dots,X_{j_k})(q),$$

así $a_{j_1\cdots j_k|V} = \omega(X_{j_1},\dots,X_{j_k})_{|V}$, e logo $a_{j_1\cdots j_k}$ é diferenciable nunha veciñanza aberta de cada punto de U, é dicir $a_{j_1\cdots j_k} \in \mathcal{F}(U)$ para cada $1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n$ e, polo tanto, $\omega\colon M \to \bigwedge^k T(M)$ é unha k-forma diferencial sobre M, á que lle corresponde trivialmente a aplicación $\mathcal{F}(M)$-multilinear e antisimétrica ω de partida. □

Observación 3.22. O conxunto das aplicacións $\mathcal{F}(M)$-multilineares antisimétricas

$$\omega\colon \mathfrak{X}(M)\times\overset{(k)}{\cdots}\times\mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

ten dun modo natural unha estrutura de espazo vectorial real e de módulo sobre $\mathcal{F}(M)$, que se identifica con $\mathcal{E}^k(M)$.

En particular, unha forma diferencial de grao 1 sobre M pódese interpretar ou ben como unha sección diferenciable do fibrado cotanxente $\omega\colon M \to T^*(M)$, ou ben como unha aplicación $\mathcal{F}(M)$-linear $\omega\colon \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$, e a relación entre as dúas interpretacións está dada por

$$\omega(X)(p) = \omega_p(X_p), \qquad X \in \mathfrak{X}(M),\ p \in M.$$

Por exemplo, se $f \in \mathcal{F}(M)$, a diferencial de f é unha sección (diferenciable) do fibrado cotanxente (ver definición 3.15) e como aplicación $\mathcal{F}(M)$-linear é

$$\begin{aligned} df\colon \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \mathcal{F}(M) \\ X &\longmapsto (df)(X) = Xf \end{aligned}$$

(véxase tamén 2.23).

• **3.23.** (*A álxebra exterior das formas diferenciais sobre unha variedade diferenciable*)

O produto exterior das formas diferenciais $\omega \in \mathcal{E}^r(M)$ e $\eta \in \mathcal{E}^s(M)$ correspóndese coa aplicación obtida a partir das aplicacións $\mathcal{F}(M)$-multilineares antisimétricas ω e η por

$$\begin{aligned} (\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{r+s}) &= \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} \varepsilon(\sigma)\, \omega\big(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}\big)\, \eta\big(X_{\sigma(r+1)}, \dots, X_{\sigma(r+s)}\big) \\ &= \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}(r,s)} \varepsilon(\sigma)\, \omega\big(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)}\big)\, \eta\big(X_{\sigma(r+1)}, \dots, X_{\sigma(r+s)}\big), \end{aligned}$$

onde $X_1, \dots, X_{r+s} \in \mathfrak{X}(M)$.

Tamén poñemos $\mathcal{E}^k(M) = 0$ para todo $k \in \mathbb{Z}, k < 0$. Se $\dim M = n$,

$$\mathcal{E}^*(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} \mathcal{E}^k(M) = \mathcal{E}^0(M) \oplus \mathcal{E}^1(M) \oplus \mathcal{E}^2(M) \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}^n(M)$$

ten estrutura de espazo vectorial real e de módulo sobre $\mathcal{F}(M)$. Cada elemento de $\mathcal{E}^*(M)$ pódese representar como unha suma formal

$$\omega = \sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega_k = \omega_0 + \omega_1 + \cdots + \omega_n, \qquad \omega_k \in \mathcal{E}^k(M) \quad \forall\, k \in \mathbb{Z},$$

e dise que ω é unha *forma diferencial* sobre M. Co produto exterior $\wedge$ (que se estende a $\mathcal{E}^*(M)$ por bilinearidade) é unha álxebra graduada anticonmutativa sobre $\mathbb{R}$,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^*(M) \times \mathcal{E}^*(M) &\xrightarrow{\ \wedge\ } \mathcal{E}^*(M) \\ (\omega, \eta) &\longmapsto \omega \wedge \eta = \sum_{k=0}^{n} \Big(\sum_{r+s=k} \omega_r \wedge \eta_s \Big). \end{aligned}$$

Dicimos que $\mathcal{E}^*(M)$ é a *álxebra exterior das formas diferenciais sobre* M.

Exemplo 3.24. (*Formas diferenciais sobre* $\mathbb{R}^n$)

Para calquera variedade diferenciable M de dimensión $n \geq 1$, cada espazo vectorial $\mathcal{E}^k(M)$, $0 \leq k \leq n$, é un espazo vectorial real de dimensión infinita. Como $\mathcal{F}(M)$-módulo é localmente libre, é dicir, cada punto de M ten unha veciñanza aberta U tal que $\mathcal{E}^k(U)$ é un $\mathcal{F}(U)$-módulo libre finitamente xerado.

No caso $M = \mathbb{R}^n$ o sistema de coordenadas identidade $\mathrm{id}_{\mathbb{R}^n} = (r^1, \dots, r^n)$ permite considerar no $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$-módulo

$$\mathcal{E}^*(\mathbb{R}^n) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{E}^k(\mathbb{R}^n) = \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^n) \oplus \mathcal{E}^2(\mathbb{R}^n) \oplus \cdots \oplus \mathcal{E}^n(\mathbb{R}^n)$$

a base formada polas seguintes 2^n formas diferenciais

$$1,\ \ dr^i\ (1 \le i \le j),\ \ dr^i \wedge dr^j\ (i < j),\ \ dr^i \wedge dr^j \wedge dr^k\ (i < j < k),\ \dots\ , dr^1 \wedge \cdots \wedge dr^n.$$

Cada $\omega \in \mathcal{E}^k(\mathbb{R}^n)$, $1 \le k \le n$, pódese escribir de modo único como

$$\omega = \sum_{1\le j_1 < \cdots < j_k \le n} a_{j_1\cdots j_k}\, dr^{j_1} \wedge \cdots \wedge dr^{j_k}, \qquad a_{j_1\cdots j_k} \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^n).$$

En particular $\mathcal{E}^0(\mathbb{R}^n)$ e $\mathcal{E}^n(\mathbb{R}^n)$ son $\mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$-módulos unidimensionais, e tense o isomorfismo

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^n) &\longrightarrow \mathcal{E}^n(\mathbb{R}^n) \\ f &\longmapsto f\, dr^1 \wedge \cdots \wedge dr^n. \end{aligned}$$

Por outra banda, se $f \in \mathcal{E}^0(\mathbb{R}^n) = \mathcal{F}(\mathbb{R}^n)$, entón $df \in \mathcal{E}^1(M)$ exprésase como

$$df = \sum_{j=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial r^j}\, dr^j.$$

• **3.25.** (*Imaxes recíprocas de formas e homomorfismo de álxebras inducido*)

Sexan M e N variedades diferenciables de dimensións m e n, respectivamente, e sexa $f\colon M \to N$ unha aplicación diferenciable.

(1) Se $p \in M$, para cada $k \in \mathbb{Z}$, $k \ge 1$, defínese $f_p^*\colon \bigwedge^k T_{f(p)}(N) \to \bigwedge^k T_p(M)$, por

$$(f_p^*\alpha)(v_1, \dots, v_k) = \alpha\big(f_{*p}(v_1), \dots, f_{*p}(v_k)\big)\,,$$

para todo $\alpha \in \bigwedge^k T_{f(p)}(N)$, $v_1, \dots, v_k \in T_p(M)$. Se $k = 1$, $f_p^*\colon T^*_{f(p)}(N) \to T^*_p(M)$ é a *aplicación cotanxente* de f en p. É inmediato que f_p^* é linear para cada $k \ge 1$, e que se $\alpha \in \bigwedge^r_{f(p)}(N)$ e $\beta \in \bigwedge^s T_{f(p)}(N)$, entón

$$f_p^*(\alpha \wedge \beta) = (f_p^*\alpha) \wedge (f_p^*\beta)\,.$$

Tense un homomorfismo de álxebras exteriores $f^*\colon \lambda_N^k \to \lambda_M^k$ determinado por

$$\begin{aligned} f^*\colon \textstyle\bigwedge^k T(N) &\longrightarrow \textstyle\bigwedge^k T(M) \\ \alpha^1 \wedge \cdots \wedge \alpha^k \in \textstyle\bigwedge^k_{f(p)}(N) &\longmapsto (f_p^*\alpha^1) \wedge \cdots \wedge (f_p^*\alpha^k) \in \textstyle\bigwedge^k_p(M). \end{aligned}$$

(2) Para cada $\omega \in \mathcal{E}^k(N)$, $k \geq 1$, defínese a *imaxe recíproca* de ω por f como a k-forma

$$\begin{aligned} f^*\omega\colon M &\longrightarrow \textstyle\bigwedge^k T(M) \\ p &\longmapsto (f^*\omega)_p = f_p^*\omega_{f(p)}\ , \end{aligned}$$

e se $\omega = h \in \mathcal{E}^0(N) = \mathcal{F}(N)$, defínese $f^*h = h \circ f$.

(3) Verifícase $f^*(dh) = d(h \circ f) = d(f^*h)$ para cada $h \in \mathcal{F}(N)$, xa que se $p \in M$ e $v \in T_p(M)$, tense

$$\begin{aligned} \big(f^*(dh)\big)_p(v) &= f_p^*(dh)_{f(p)}(v) = (dh)_{f(p)}(f_{*p}(v)) = (f_{*p}(v))(h) \\ &= v(h \circ f) = d(h \circ f)_p(v) = \big(d(f^*h)\big)_p(v), \end{aligned}$$

onde usamos as definicións 1.14 e 3.8.

(4) Para todo $k \geq 0$, a *aplicación imaxe recíproca*

$$\begin{aligned} f^*\colon \mathcal{E}^k(N) &\longrightarrow \mathcal{E}^k(M) \\ \omega &\longmapsto f^*(\omega) = f^*\omega \end{aligned}$$

está ben definida, xa que se (V, ψ) é unha carta de N, $\psi = (y^1, \ldots, y^n)$, e $\omega \in \mathcal{E}^k(N)$ é tal que

$$\omega_{|V} = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} b_{j_1 \ldots j_k} dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k},$$

e $p \in f^{-1}(V)$ entón

$$\begin{aligned} (f^*\omega)_p = f_p^*\omega_{f(p)} &= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} (f_p^* b_{j_1 \ldots j_k}) f_p^*(dy^{j_1})_{f(p)} \wedge \cdots \wedge f_p^*(dy^{j_k})_{f(p)} \\ &= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} (b_{j_1 \ldots j_k} \circ f)(p) d(y^{j_1} \circ f)_p \wedge \cdots \wedge d(y^{j_k} \circ f)p, \end{aligned}$$

de onde se segue que a k-forma $f^*\omega$ sobre M é diferenciable e polo tanto $f^*\omega \in \mathcal{E}^k(M)$. Ademais, para cada $k \geq 0$ a aplicación f^* é un homomorfismo de espazos vectoriais.

(5) Se $\omega \in \mathcal{E}^r(N)$, $\eta \in \mathcal{E}^s(N)$, $r, s \geq 0$, entón $f^*(\omega \wedge \eta) = (f^*\omega) \wedge (f^*\eta)$, polo que se ten un homomorfismo de álxebras inducido

$$\begin{aligned} f^*\colon \mathcal{E}^*(N) &\longrightarrow \mathcal{E}^*(M) \\ \omega = \textstyle\sum_k \omega_k &\longmapsto f^*(\omega) = \textstyle\sum_k f^*\omega_k, \end{aligned}$$

que conserva o grao das formas.

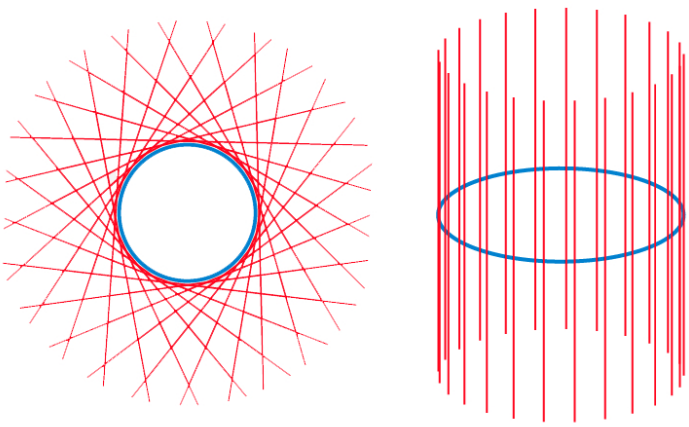
Se $g\colon N \to L$ é outra aplicación diferenciable entre variedades diferenciable entón $(g \circ f)^* = f^* \circ g^*$. Se $M = N$ e f é a identidade na variedade M é inmediato que f^* é a identidade en $\mathcal{E}^*(M)$. Así, ao asignar a cada variedade diferenciable M a álxebra $\mathcal{E}^*(M)$ das formas diferenciais sobre M e a cada aplicación diferenciable $f\colon M \to N$ a aplicación imaxe recíproca $f^*\colon \mathcal{E}^*(N) \to \mathcal{E}^*(M)$, tense o functor contravariante $\mathcal{E}^*$ da categoría de variedades diferenciables (e aplicacións diferenciables) na categoría de álxebras graduadas anticonmutativas sobre $\mathbb{R}$ (e homomorfismos). Se $f\colon M \to N$ é un difeomorfismo entón f^* é un isomorfismo de álxebras graduadas.

Exemplo 3.26. (*Unha forma diferencial non nula sobre* $\mathbb{S}^1$)

A circunferencia $\mathbb{S}^1$ é unha subvariedade regular de $\mathbb{R}^2$ e a inclusión $\boldsymbol{i}\colon \mathbb{S}^1 \to \mathbb{R}^2$ induce a aplicación linear $\boldsymbol{i}^*\colon \mathcal{E}^1(\mathbb{R}^2) \to \mathcal{E}^1(\mathbb{S}^1)$, co que cada forma diferencial $\omega = f\,dx + g\,dy$ sobre $\mathbb{R}^2$, onde x, y son as funcións coordenadas do sistema de coordenadas identidade de $\mathbb{R}^2$ e $f, g \in \mathcal{F}(\mathbb{R}^2)$, define unha forma diferencial $\boldsymbol{i}^*\omega \in \mathcal{E}^1(\mathbb{S}^1)$. Se se fai actuar sobre o campo $\partial_\theta = (-y\partial_x + x\partial_y)_{|\mathbb{S}^1} \in \mathfrak{X}(\mathbb{S}^1)$ (véxase 2.28), para cada $p \in \mathbb{S}^1$,

$$\begin{aligned}
(\boldsymbol{i}^*\omega)_p((\partial_\theta)_p) &= \omega_p(\boldsymbol{i}_{*p}((\partial_\theta)_p)) \\
&= \big(f(p)(dx)_p + g(p)(dy)_p\big)\big(-y(p)\big(\partial_x\big)_p + x(p)\big(\partial_y\big)_p\big) \\
&= -f(p)y(p) + g(p)x(p),
\end{aligned}$$

e ao poñer $f = -y$ e $g = x$ obtense a forma diferencial $\alpha = \boldsymbol{i}^*(-y\,dx + x\,dy)$ sobre $\mathbb{S}^1$ que é non nula en cada punto xa que $\alpha(\partial_\theta)$ é a función constante 1 sobre $\mathbb{S}^1$. A 1-forma α é unha sección do fibrado cotanxente $T^*(\mathbb{S}^1)$, así que este fibrado, como sucede co fibrado tanxente $T(\mathbb{S}^1)$, é isomorfo ao fibrado trivial $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$.



Capítulo 4

Derivacións e antiderivacións

Imos estudar neste capítulo tres operadores lineares fundamentais no estudo das variedades diferenciables: a diferencial exterior, a derivada de Lie respecto dun campo de vectores e o produto interior ou contracción cun campo de vectores, e que están ligados pola chamada “fórmula máxica de Cartan”. Imos ver previamente propiedades comúns a estes operadores, para o que imos a considerar as derivacións e as antiderivacións na álxebra das formas diferenciais sobre unha variedade diferenciable.

4.1. Derivacións e antiderivacións de formas diferenciais

Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión n e $\mathcal{E}^*(M) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} \mathcal{E}^k(M)$ a álxebra graduada das formas diferenciais sobre M.

Definición 4.1. Un *operador linear* de $\mathcal{E}^*(M)$ é un endomorfismo do espazo vectorial $\mathcal{E}^*(M)$, isto é, unha aplicación $\mathbb{R}$-linear

$$D\colon \mathcal{E}^*(M) \longrightarrow \mathcal{E}^*(M).$$

Un operador linear de $\mathcal{E}^*(M)$ dise que é de *grao* $k \in \mathbb{Z}$ se

$$D(\mathcal{E}^s(M)) \subset \mathcal{E}^{s+k}(M), \qquad s \geq 0.$$

Un operador linear de $\mathcal{E}^*(M)$ dise que é unha *derivación* se é de grao par e

$$D(\omega \wedge \eta) = D(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge D(\eta), \qquad \omega, \eta \in \mathcal{E}^*(M),$$

e unha *antiderivación*[1] se é de grao impar e

$$D(\omega \wedge \eta) = D(\omega) \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge D(\eta), \qquad \omega \in \mathcal{E}^r(M), \eta \in \mathcal{E}^*(M).$$

[1] As propiedades características dun operador linear de $\mathcal{E}^*(M)$ para ser unha derivación ou unha antiderivación tamén se chaman *regra de Leibniz* e *regra anti-Leibniz*, respectivamente.

A proba da seguinte proposición, sobre o conmutador de dúas derivacións, o conmutador dunha derivación e unha antiderivación, e o anticonmutador de dúas antiderivacións, é inmediata.

Proposición 4.2. *Sexan D e D' derivacións de $\mathcal{E}^*(M)$ de grao k e k', respectivamente, e sexan A e A' antiderivacións de $\mathcal{E}^*(M)$ de grao l e l', respectivamente. Entón*

(*a*) $[D, D'] = D \circ D' - D' \circ D$ *é unha derivación de grao $k + k'$,*

(*b*) $[D, A] = D \circ A - A \circ D$ *é unha antiderivación de grao $k + l$,*

(*c*) $A \circ A' + A' \circ A$ *é unha derivación de grao $l + l'$,*

(*d*) $A^2 = A \circ A$ *é unha derivación de grao $2l$.*

Definición 4.3. Un operador linear $D\colon \mathcal{E}^*(M) \to \mathcal{E}^*(M)$ dise que é un *operador local* se para todo subconxunto aberto U de M se verifica:

$$\omega, \eta \in \mathcal{E}^*(M), \quad \omega_{|U} = \eta_{|U} \quad \Longrightarrow \quad (D\omega)_{|U} = (D\eta)_{|U},$$

é dicir, o comportamento de $D\omega$ nun punto $p \in M$ depende do comportamento de $D\omega$ nunha veciñanza de p.

Proposición 4.4. *As derivacións e as antiderivacións de $\mathcal{E}^*(M)$ son operadores locais.*

Demostración. É suficiente probar que se unha derivación (ou antiderivación) ω é 0 nun conxunto aberto U de M, logo $(D\omega)_{|U} = 0$, pois por linearidade das derivacións e antiderivacións, se $(\omega - \eta)_{|U} = 0$, logo $(D\omega)_{|U} - (D\eta)_{|U} = (D\omega - D\eta)_{|U} = 0$ e teriamos o resultado.

Sexa entón U un aberto de M, $p \in U$ un punto de U e ω unha k-forma diferencial tal que $\omega_{|U} = 0$. Podemos escoller unha función meseta f tal que $f_{|M\setminus U} = 1$ e $f(p) = 0$. Temos entón $\omega = f\omega$, co que $D\omega = D(f\omega) = Df \wedge \omega + f \wedge D\omega$. Agora, tanto f como ω se anulan en p, co que $(D\omega)_p = 0$ para todo $p \in U$. $\square$

Observación 4.5. Se $\omega^1, \dots, \omega^k$ son formas diferenciais de grao 1 sobre M, $k \geq 2$, próbase facilmente (por indución):

Se D é unha derivación entón

$$D(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k) = (D\omega^1) \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^k + \omega^1 \wedge (D\omega^2) \wedge \cdots \wedge \omega^k + \cdots + \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge (D\omega^k).$$

Se D é unha antiderivación entón

$$D(\omega^1 \wedge \cdots \wedge \omega^k) = (D\omega^1) \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge \omega^k - \omega^1 \wedge (D\omega^2) \wedge \cdots \wedge \omega^k + \cdots + (-1)^{s-1} \omega^1 \wedge \omega^2 \wedge \cdots \wedge (D\omega^k).$$

Proposición 4.6. *Se D é unha derivación (ou antiderivación) de $\mathcal{E}^*(M)$ entón, para cada aberto U de M, existe unha única derivación (respectivamente, antiderivación) D_U de $\mathcal{E}^*(U)$ tal que*

$$(D\omega)_{|U} = D_U(\omega_{|U})$$

para cada $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$, $k \geq 0$. Ademais, se D é de grao k entón D_U é de grao k.

Demostración. Se $D\colon \mathcal{E}^*(M) \to \mathcal{E}^*(M)$ é unha derivación ou unha antiderivación e U un aberto de M, definimos $D_U\colon \mathcal{E}^*(U) \to \mathcal{E}^*(U)$ asignando a cada $\alpha \in \mathcal{E}^*(U)$ a aplicación

$$\begin{aligned} D_U\alpha\colon U &\longrightarrow \textstyle\bigwedge T(U) = \bigwedge T(M)_{|U} \\ p &\longmapsto (D_U\alpha)_p = (D\omega)_p, \qquad \text{onde } \omega \in \mathcal{E}^*(M) \text{ é tal que } \omega_{|V} = \alpha_{|V}, \\ & \qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\quad V \text{ aberto en } M,\ p \in V,\ \overline{V} \subset U. \end{aligned}$$

Obsérvese que tal ω existe pola propiedade de extensión local de formas diferenciais (proposición 3.19); se $\dim M = n$ e $\alpha = \sum_{k=0}^n \alpha_k$, con $\alpha_k \in \mathcal{E}^k(U)$, entón $\omega = \sum_{k=0}^n \omega_k$, onde $\omega_k \in \mathcal{E}^k(M)$ é tal que $(\omega_k)_{|V} = (\alpha_k)_{|V}$ para todo $k = 0, \ldots, n$. Ademais $D_U\alpha$ está ben definida xa que se $\omega' \in \mathcal{E}^*(M)$ é tal que $\omega'_{|V'} = \alpha_{|V'}$ onde V' é outra veciñanza aberta de p contida en U, entón $\omega_{|V\cap V'} = \omega'_{|V\cap V'}$, e dado que as derivacións e as antiderivacións de M son operadores locais (proposición 4.4) tense $(D\omega)_{|V\cap V'} = (D\omega')_{|V\cap V'}$ e polo tanto $(D\omega)_p = (D\omega')_p$.

É evidente que D_U é un operador linear por selo D e que se D é unha derivación (respectivamente, unha antiderivación) tamén o é D_U (xa que se ω é una extensión local de α nunha veciñanza aberta de $p \in U$ e η é unha extensión local de β nunha veciñanza aberta de p, os dous contidos en U, entón $\lambda\,\omega + \mu\,\eta$ —con $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$— e $\omega \wedge \eta$ son extensións locais de $\lambda\,\alpha + \mu\,\beta$ e $\alpha \wedge \beta$, respectivamente, na intersección de ambas veciñanzas abertas de p).

Da definición de D_U é inmediato que $D_U(\omega_{|U}) = (D\omega)_{|U}$ para cada $\omega \in \mathcal{E}^*(M)$. Para probar a unicidade de D_U, supoñamos que temos outra derivación ou antiderivación $D'_U\colon \mathcal{E}^*(U) \to \mathcal{E}^*(U)$ tal que $D'_U(\omega_{|U}) = (D\omega)_{|U}$ para todo $\omega \in \mathcal{E}^*(M)$ e vexamos que $D'_U = D_U$. En efecto, se $\alpha \in \mathcal{E}^*(U)$, $p \in U$, e consideramos unha veciñanza aberta V de p tal que $V \subset U$ e $\omega \in \mathcal{E}^*(M)$ é tal que $\omega_{|V} = \alpha_{|V}$ entón, por ser D'_U un operador local,

$$(D'_U\alpha)_p = (D'_U\omega_{|U})_p = ((D\omega)_{|U})_p = (D\omega)_p = (D_U\alpha)_p,$$

onde a última igualdade débese á definición de D_U, o que conclúe a proba da proposición, xa que é trivial que se D é de grao k, tamén o é D_U. $\square$

Proposición 4.7. *Unha derivación ou unha antiderivación de $\mathcal{E}^*(M)$ está completamente determinada pola súa actuación sobre $\mathcal{E}^0(M) = \mathcal{F}(M)$ e $\mathcal{E}^1(M)$. (De feito, dúas derivacións ou antiderivacións de $\mathcal{E}^*(M)$ son iguais se coinciden sobre as funcións e sobre as diferenciais das funcións).*

Demostración. Sexan D e D' derivacións (ou antiderivacións) de $\mathcal{E}^*(M)$. Imos probar que

$$\text{se } D(f) = D'(f) \text{ e } D(df) = D'(df) \ \text{ para cada } f \in \mathcal{F}(M) \ \text{ entón } \ D = D',$$

para o que, se substituímos $D - D'$ por D, abonda probar que se D é unha derivación ou unha antiderivación de $\mathcal{E}^*(M)$ tense que

$$\text{se } D(f) = 0 \text{ e } D(df) = 0 \text{ para cada } f \in \mathcal{F}(M) \ \text{ entón } \ D = 0.$$

Haberá que probar que $D\omega = 0$ para todo $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$, $k \geq 1$, para o que imos ver que dado $p \in M$, $(D\omega)_p = 0$. Para isto, tomamos unha carta (U, φ) de M con $p \in U$, $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$. Temos

$$\omega_{|U} = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} a_{j_1 \cdots j_k}\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}, \qquad a_{j_1 \cdots j_k} \in \mathcal{F}(U).$$

Pola propiedade de extensión local de funcións diferenciables (corolario 1.11) existen unha veciñanza aberta V de p, $\overline{V} \subset U$, funcións $f_{j_1 \ldots j_k} \in \mathcal{F}(M)$ para $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ tales que $f_{j_1 \ldots j_k |V} = a_{j_1 \cdots j_k |V}$, e funcións $g^1, \ldots, g^n \in \mathcal{F}(M)$ tales que $g^j_{|V} = x^j_{|V}$ para $j = 1, \ldots, n$. Entón,

$$\eta = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} f_{j_1 \cdots j_k}\, dg^{j_1} \wedge \cdots \wedge dg^{j_k} \in \mathcal{E}^k(M)$$

é tal que $\eta_{|V} = \omega_{|V}$, xa que $f_{j_1 \ldots j_k |V} = a_{j_1 \cdots j_k |V}$ e para todo $q \in V$, e cada $v \in T_q(M)$, $(dg^j)_q(v) = v(g^j) = v(x^j) = (dx^j)_q(v)$. Pola proposición 4.4, D é un operador local, co que $(D\omega)_{|U} = (D\eta)_{|U}$, e polo tanto $(D\omega)_p = (D\eta)_p = 0$, porque

$$D\eta = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \big(D(f_{j_1 \cdots j_k}) \wedge dg^{j_1} \wedge \cdots \wedge dg^{j_k} + f_{j_1 \cdots j_k} D(dg^{j_1} \wedge \cdots \wedge dg^{j_k}) \big) = 0,$$

tendo en conta a observación 4.5, e xa que D se anula nas funcións diferenciables sobre M e nas diferenciais das funcións. □

4.2. O produto interior

Teorema 4.8. *Existe unha única aplicación*

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\iota} \colon \mathfrak{X}(M) \times \mathcal{E}^*(M) &\longrightarrow \mathcal{E}^*(M) \\ (X, \omega) &\longmapsto \boldsymbol{\iota}_X \omega \end{aligned}$$

tal que para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$, $\boldsymbol{\iota}_X \colon \mathcal{E}^*(M) \to \mathcal{E}^*(M)$ é unha antiderivación de grao -1 que satisfai as dúas seguintes propiedades para cada $f \in \mathcal{F}(M)$:

(1) $\boldsymbol{\iota}_X f = 0$,

(2) $\boldsymbol{\iota}_X(df) = (df)(X)$.

Ademais, $\boldsymbol{\iota}_X\omega = \omega(X)$ para todo $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$, e se ω é unha forma diferencial de grao $k \geq 2$ entón a forma diferencial $\boldsymbol{\iota}_X\omega$ de grao $k-1$ está determinada por

$$(\star) \qquad (\boldsymbol{\iota}_X\omega)(X_1, \dots, X_{k-1}) = \omega(X, X_1, \dots, X_{k-1}), \qquad X_1, \dots, X_{k-1} \in \mathfrak{X}(M).$$

Demostración. Como vimos na proposición 4.7, as (anti)derivacións están determinadas por como actúan sobre as funcións e as diferenciais das funcións, polo que as condicións (1) e (2) garanten a unicidade de $\boldsymbol{\iota}$ no caso da súa existencia. Para demostrar esta, para cada campo de vectores diferenciable X sobre M definimos $\boldsymbol{\iota}_X$ por $\boldsymbol{\iota}_X f = 0$ para $f \in \mathcal{F}(M)$, por $\boldsymbol{\iota}_X\omega = \omega(X)$ se $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$ e por $(\star)$ se $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$, $k \geq 2$. Cada $\boldsymbol{\iota}_X \colon \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^{k-1}(M)$ está ben definido e é $\mathbb{R}$-linear, e podemos estender a $\mathcal{E}^*(M)$ por linearidade,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\iota}_X \colon \mathcal{E}^*(M) &\longrightarrow \mathcal{E}^*(M) \\ \sum_{k \in \mathbb{Z}} \omega_k &\longmapsto \sum_{k \in \mathbb{Z}} \boldsymbol{\iota}_X\omega_k. \end{aligned}$$

Obviamente, $\boldsymbol{\iota}_X$ cumpre as condicións (1) e (2), e imos ver agora que é unha antiderivación.

Para isto, sexan $\omega \in \mathcal{E}^r(M)$ e $\eta \in \mathcal{E}^s(M)$. Se $r = s = 0$ entón $\omega = f, \eta = g \in \mathcal{F}(M)$, $f \wedge g = fg \in \mathcal{F}(M)$, logo

$$\boldsymbol{\iota}_X(f \wedge g) = 0 = \boldsymbol{\iota}_X(f) \wedge g + (-1)^0 f \wedge \boldsymbol{\iota}_X(g).$$

Se $r = 0$, $s \geq 1$, $\omega = f \in \mathcal{F}(M)$, $\omega \wedge \eta = f \wedge \eta = f\,\eta$, logo $\boldsymbol{\iota}_X(f \wedge \eta)(X_1, \dots, X_s) = (f\,\eta)(X_1, \dots, X_s) = f\big(\eta(X_1, \dots, X_s)\big) = f(\boldsymbol{\iota}_X\eta)(X_1, \dots, X_s)$, así que

$$\boldsymbol{\iota}_X(f \wedge \eta) = \boldsymbol{\iota}_X(f\eta) = f\boldsymbol{\iota}_X(\eta) = 0 + f \wedge \boldsymbol{\iota}_X(\eta) = \boldsymbol{\iota}_X(f) \wedge \eta + (-1)^0 f \wedge \boldsymbol{\iota}_X(\eta).$$

Se $r \geq 1$, $s = 0$, $\eta = g \in \mathcal{F}(M)$, $\omega \wedge \eta = \omega\, g = g\,\omega$, e tense

$$\boldsymbol{\iota}_X(\omega \wedge g) = \boldsymbol{\iota}_X(g\,\omega) = g\,\boldsymbol{\iota}_X(\omega) = \boldsymbol{\iota}_X(\omega) \wedge g + 0 = \boldsymbol{\iota}_X(\omega) \wedge g + (-1)^r \omega \wedge \boldsymbol{\iota}_X(g).$$

Se $r, s \geq 1$, escribimos $X_1 = X$, e consideramos $X_2, \dots, X_{r+s} \in \mathfrak{X}(M)$. Tense

$$\begin{aligned} \big(\boldsymbol{\iota}_X(\omega \wedge \eta)\big)(X_2, \dots, X_{r+s}) &= (\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{r+s}) \\ &= \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}} \varepsilon(\sigma)\omega(X_{\sigma(1)}, \dots, X_{\sigma(r)})\eta(X_{\sigma(r+1)}, \dots, X_{\sigma(r+s)}). \end{aligned}$$

Poñemos a partición $\mathfrak{S}_{r+s} = \mathfrak{S}' \cup \mathfrak{S}''$, onde

$$\mathfrak{S}' = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s} | \sigma^{-1}(1) \leq r\}, \qquad \mathfrak{S}'' = \{\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s} | \sigma^{-1}(1) > r\}.$$

Agora, para cada $\sigma \in \mathfrak{S}'$, sexa τ_σ a transposición de $\mathfrak{S}_{r+s}$ que intercambia 1 e $\sigma^{-1}(1)$, e identificamos $\mathfrak{S}_{r+s-1}$ cas permutacións de $\mathfrak{S}_{r+s}$ que deixan fixo 1. Podemos escribir

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}'} \varepsilon(\sigma)\omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)})\eta(X_{\sigma(r+1)}, \ldots, X_{\sigma(r+s)}) \\
&\qquad = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}'} \varepsilon(\sigma\tau_\sigma)\omega(X_1, X_{\sigma\tau_\sigma(2)}, \ldots, X_{\sigma\tau_\sigma(r)})\eta(X_{\sigma\tau_\sigma(r+1)}, \ldots, X_{\sigma\tau_\sigma(r+s)}) \\
&\qquad = \frac{r}{r!s!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_{r+s-1}} \varepsilon(\sigma')\omega(X_1, X_{\sigma'(2)}, \ldots, X_{\sigma'(r)})\eta(X_{\sigma'(r+1)}, \ldots, X_{\sigma'(r+s)}) \\
&\qquad = \big(\boldsymbol{\iota}_X(\omega) \wedge \eta\big)(X_2, \ldots, X_{r+s}),
\end{aligned}$$

pois para cada $\sigma' \in \mathfrak{S}_{r+s-1}$ existen r permutacións $\sigma \in \mathfrak{S}'$ tales que $\sigma\tau_\sigma = \sigma'$. De forma similar, para cada $\sigma \in \mathfrak{S}''$ considérase a transposición $\tau'_\sigma \in \mathfrak{S}_{r+s}$ que intercambia $r+1$ e $\sigma^{-1}(1)$, e ν a permutación de $\mathfrak{S}_{r+s}$ dada por

$$\nu(i) = \begin{cases} r+1 & \text{se } \; i = 1, \\ i-1 & \text{se } \; 2 \leq i \leq r+1, \\ i & \text{se } \; i > r+1. \end{cases}$$

Tense que $\varepsilon(\nu) = (-1)^r$ e séguese

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}''} \varepsilon(\sigma)\omega(X_{\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma(r)})\eta(X_{\sigma(r+1)}, \ldots, X_{\sigma(r+s)}) \\
&\quad = \frac{1}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}''} \varepsilon(\sigma\tau'_\sigma)\omega(X_{\sigma\tau'_\sigma(1)}, \ldots, X_{\sigma\tau'_\sigma(r)})\eta(X_1, X_{\sigma\tau'_\sigma(r+2)}, \ldots, X_{\sigma\tau'_\sigma(r+s)}) \\
&\quad = \frac{(-1)^r r}{r!s!} \sum_{\sigma \in \mathfrak{S}''} \varepsilon(\sigma\tau'_\sigma\nu)\omega(X_{\sigma\tau'_\sigma\nu(2)}, \ldots, X_{\sigma\tau'_\sigma\nu(r+1)})\eta(X_1, X_{\sigma\tau'_\sigma\nu(r+2)}, \ldots, X_{\sigma\tau'_\sigma\nu(r+s)}) \\
&\quad = \frac{(-1)^r r}{r!s!} \sum_{\sigma' \in \mathfrak{S}_{r+s-1}} \varepsilon(\sigma')\omega(X_{\sigma'(2)}, \ldots, X_{\sigma'(r+1)})\eta(X_1, X_{\sigma'(r+2)}, \ldots, X_{\sigma'(r+s)}) \\
&\quad = (-1)^r \big(\omega \wedge \boldsymbol{\iota}_X(\eta)\big)(X_2, \ldots, X_{r+s}),
\end{aligned}$$

co que finalmente $\boldsymbol{\iota}_X(\omega \wedge \eta) = \boldsymbol{\iota}_X(\omega) \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge \boldsymbol{\iota}_X(\eta)$, como queriamos probar. □

Definición 4.9. O operador $\boldsymbol{\iota}_X$ chámase *produto interior por* $X \in \mathcal{F}(M)$, e a forma diferencial $\boldsymbol{\iota}_X\omega$ dise que é o *produto interior de* ω *por* X. Tamén se di que $\boldsymbol{\iota}_X\omega$ é a *contracción* de ω con X.

• **4.10.** O produto interior tamén se pode interpretar como unha aplicación

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\iota}\colon \mathfrak{X}(M) &\longrightarrow \operatorname{End}\bigl(\mathcal{E}^*(M)\bigr) \\ X &\longmapsto \boldsymbol{\iota}_X\colon \mathcal{E}^*(M) \to \mathcal{E}^*(M) \end{aligned}$$

de modo que cada $\boldsymbol{\iota}_X$ é un endomorfismo de grao -1 do $\mathcal{F}(M)$-módulo graduado $\mathcal{E}^*(M)$, xa que

$$\begin{aligned} &\boldsymbol{\iota}_X(\omega+\eta) = \boldsymbol{\iota}_X(\omega) + \boldsymbol{\iota}_X(\eta), \\ &\boldsymbol{\iota}_X(f\omega) = \boldsymbol{\iota}_X(f)\wedge\omega + (-1)^0 f\boldsymbol{\iota}_X(\omega) = f\boldsymbol{\iota}_X(\omega), \end{aligned}$$

para cada $\omega,\eta \in \mathcal{E}^*(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$.

Proposición 4.11. *Se $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, $f \in \mathcal{F}(M)$, verifícase:*

(*a*) $\boldsymbol{\iota}_{X+Y} = \boldsymbol{\iota}_X + \boldsymbol{\iota}_Y, \quad \boldsymbol{\iota}_{fX} = f\boldsymbol{\iota}_X,$

(*b*) $\boldsymbol{\iota}_X^2 = \boldsymbol{\iota}_X\boldsymbol{\iota}_X = 0.$

Demostración. A demostración de (a) é inmediata. A proba de (b) séguese deseguida de que a composición de dúas antiderivacións é unha derivación (apartado (d) da proposición 4.2) e de que unha derivación está determinada pola súa actuación sobre as funcións diferenciables e sobre as súas diferenciais (proposición 4.7). □

Proposición 4.12 (Expresión local do produto interior)**.** *Sexa (U,φ) unha carta da variedade diferenciable M, $\varphi = (x^1,\dots,x^n)$. Se $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ se pode escribir localmente como*

$$\omega_{|U} = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} a_{j_1\cdots j_k}\, dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k},$$

e $X \in \mathfrak{X}(M)$ ten a expresión local en (U,φ)

$$X_{|U} = \sum_{i=1}^n \lambda^i\, \partial_{x^i}$$

entón

$$(\boldsymbol{\iota}_X\omega)_{|U} = \sum_{\substack{1\le j_1<\cdots<j_k\le n,\\ 1\le i\le k}} (-1)^{i-1}\lambda^{j_i} a_{j_1\cdots j_i\cdots j_k} dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{j_i}}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}.$$

Demostración. Pola proposición 4.6 sobre a restrición das antiderivacións, consecuencia de que estas son operadores locais, $(\boldsymbol{\iota}_X\omega)_{|U} = \boldsymbol{\iota}_{X_{|U}}\omega_{|U}$. Observemos en primeiro lugar que $\boldsymbol{\iota}_{\partial_{x^i}} dx^j = dx^j(\partial_{x^i}) = \delta_i^j$. Polo tanto, por ser $\boldsymbol{\iota}_{\partial_{x^i}}$ unha antiderivación, da observación 4.5 séguese:

$$\bigl(\boldsymbol{\iota}_{\partial_{x^i}}\bigr)(dx^1\wedge\cdots\wedge dx^k) = (-1)^{i-1}dx^1\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^i}\wedge\cdots\wedge dx^k,$$

onde $\widehat{dx^i}$ indica que o termo dx^i non aparece. Por outra banda, $\boldsymbol{\iota}_{X_{|U}}\omega_{|U} = \boldsymbol{\iota}_{(\sum_{i=1}^n \lambda^i \partial_{x^i})}\omega_{|U} = \sum_{i=1}^n \lambda^i(\boldsymbol{\iota}_{\partial_{x^i}}\omega_{|U})$, e polo tanto

$$\begin{aligned}
\boldsymbol{\iota}_{X_{|U}}\omega_{|U} &= \sum_{i=1}^n \lambda^i \boldsymbol{\iota}_{\partial_{x^i}}\Big(\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} a_{j_1\cdots j_k}\, dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}\Big)\\
&= \sum_{i=1}^n \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} \lambda^i a_{j_1\cdots j_k} \boldsymbol{\iota}_{\partial_{x^i}}\big(dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}\big)\\
&= \sum_{\substack{1\le j_1<\cdots<j_k\le n,\\ 1\le i\le k}} (-1)^{i-1}\lambda^{j_i} a_{j_1\cdots j_i\cdots j_k} dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{j_i}}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k},
\end{aligned}$$

onde temos en conta que se $i\neq j_1,\dots,j_k$ entón $\boldsymbol{\iota}_{\partial_{x^i}}(dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}) = 0$. □

4.3. A derivada de Lie

A derivada de Lie dunha forma diferencial con respecto a un campo de vectores diferenciable X vai aparecer agora como unha xeneralización da acción de X sobre as funcións diferenciables.

Teorema 4.13. *Existe unha única aplicación*

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}\colon \mathfrak{X}(M)\times\mathcal{E}^*(M) &\longrightarrow \mathcal{E}^*(M)\\
(X,\omega) &\longmapsto \mathcal{L}_X\omega
\end{aligned}$$

que satisfai as seguintes propiedades:

(1) $\mathcal{L}_X\colon \omega\in\mathcal{E}^*(M)\longrightarrow \mathcal{L}_X\omega\in\mathcal{E}^*(M)$ *é unha derivación de grao* 0.

(2) *Se* $f\in\mathcal{F}(M)$ *entón* $\mathcal{L}_X f = Xf$.

(3) *Se* $f\in\mathcal{F}(M)$ *entón* $\mathcal{L}_X(df) = d(Xf)$.

Demostración. A unicidade séguese inmediatamente de que, por ser unha derivación, cada $\mathcal{L}_X$ está completamente determinada pola súa actuación sobre as funcións en $\mathcal{F}(M)$ e as súas diferenciais (proposición 4.7).

Suporemos ao longo da demostración que p é un punto arbitrario de M e que está dado un fluxo local $\{\Phi_t\colon U\to M\}_{t\in I_\varepsilon}$ de X nunha veciñanza aberta U de p. Entón, para cada $k\ge 0$ e cada $t\in I_\varepsilon$, temos un homomorfismo de espazos vectoriais

$$\begin{aligned}
\Phi_t^*\colon \mathcal{E}^k(M) &\longrightarrow \mathcal{E}^k(U)\\
\omega &\longmapsto \Phi_t^*(\omega) = \Phi_t^*\omega\,,
\end{aligned}$$

onde $(\Phi_t^*\omega)_p = (\Phi_t^*)_p\,(\omega_{\Phi_t(p)})$ se $k \geq 1$ e $\Phi_t^*\omega = \omega \circ \Phi_t$ se $k = 0$ (ver 3.25). Definimos

$$(\mathcal{L}_X\omega)_p = \lim_{t\to 0} \frac{(\Phi_t^*\omega)_p - \omega_p}{t} = \lim_{t\to 0} \frac{(\Phi_t^*)_p(\omega_{\Phi_t(p)}) - \omega_p}{t}.$$

Para comprobar (1) consideramos en primeiro lugar $\mathcal{L}_X$ como unha aplicación definida en $\mathcal{E}^*(M)$ pero con valores en formas que non son necesariamente diferenciables, e vemos facilmente que $\mathcal{L}_X$ verifica as propiedades de derivación. En efecto, é trivial que $\mathcal{L}_X$ é $\mathbb{R}$-linear; ademais, se $\omega \in \mathcal{E}^r(M)$ e $\eta \in \mathcal{E}^s(M)$, $r, s \geq 0$, entón

$$\begin{aligned}
\big(\mathcal{L}_X(\omega\wedge\eta)\big)_p &= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big((\Phi_t^*(\omega\wedge\eta)_p - (\omega\wedge\eta)_p\big)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big((\Phi_t^*(\omega\wedge\eta)_p - ((\Phi_t^*\omega)\wedge\eta)_p + ((\Phi_t^*(\omega))\wedge\eta)_p - (\omega\wedge\eta)_p\big)\\
&= \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big((\Phi_t^*(\omega\wedge\eta)_p - ((\Phi_t^*\omega)\wedge\eta)_p\big) + \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(((\Phi_t^*(\omega))\wedge\eta)_p - (\omega\wedge\eta)_p\big)\\
&= \lim_{t\to 0}\big(\Phi_t^*(\omega)\wedge \frac{1}{t}((\Phi_t^*\eta) - \eta)_p\big) + \lim_{t\to 0} \frac{1}{t}\big(((\Phi_t^*(\omega) - \omega)\wedge\eta)_p\big)\\
&= \omega\wedge\mathcal{L}_X\eta + \mathcal{L}_X\omega\wedge\eta.
\end{aligned}$$

Se $f \in \mathcal{F}(M)$ entón

$$(\mathcal{L}_X f)_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big((\Phi_t^* f)(p) - f(p)\big) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big((f\circ\Phi_t)(p) - f(p)\big) = X_p(f) = (Xf)(p),$$

por 3.25 e 2.30, o que proba (2).

Para demostrar (3) consideramos outra vez $f \in \mathcal{F}(M)$, e por (3) de 3.25 tense a seguinte igualdade en $T_p^*(M)$:

$$(\mathcal{L}_X(df))_p = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big((\Phi_t^*(df))_p - (df)_p\big) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(d(f\circ\Phi_t)_p - (df)_p\big).$$

Polo tanto, se $v \in T_p(M)$, tense

$$\begin{aligned}
(\mathcal{L}_X(df))_p(v) &= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(d(f\circ\Phi_t)_p(v) - (df)_p(v)\big) = \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(v(f\circ\Phi_t) - v(f)\big)\\
&= \lim_{t\to 0}\frac{1}{t}\big(v(f\circ\Phi_t - f)\big) = v\big(\lim_{t\to 0}\frac{1}{t}(f\circ\Phi_t - f)\big)\\
&= v(Xf) = d(Xf)_p(v),
\end{aligned}$$

onde usamos, por 2.30, que $(Xf)(q) = X_q(f) = \lim_{t\to 0}(1/t)\big((f\circ\Phi_t)(q) - f(q)\big)$ para todo $q \in U$. Logo $\mathcal{L}_X(df) = d(Xf)$.

Para rematar a demostración veremos que se ω é unha k-forma diferencial entón a k-forma $\mathcal{L}_X\omega$ é diferenciable nalgunha veciñanza aberta de cada punto $p \in M$. Para isto consideremos unha carta (W, φ) de M tal que $p \in W$ e supoñamos que a expresión local de ω en (W, φ) é

$$\omega_{|W} = \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n} a_{j_1\cdots j_k}\, dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}, \qquad a_{j_1\cdots j_k} \in \mathcal{F}(W).$$

Polo corolario 1.11, que asegura a existencia de extensións locais de funcións diferenciables, podemos encontrar unha veciñanza aberta V de p tal que $\overline{V} \subset W$, e funcións $f_{j_1 \cdots j_k}, g^1, \ldots, g^n \in \mathcal{F}(M)$ para $1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n$ tales que $f_{j_1 \cdots j_k|V} = a_{j_1 \cdots j_k|V}$ e $g^j_{|V} = x^j_{|V}$ para $j = 1, \ldots, n$. Entón

$$\widetilde{\omega} = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} f_{j_1 \cdots j_k}\, dg^{j_1} \wedge \cdots \wedge dg^{j_k} \in \mathcal{E}^k(M)$$

é tal que $\widetilde{\omega}_{|V} = \omega_{|V}$. Polo teorema 2.31 de existencia de fluxos locais, existe unha veciñanza aberta U de p que podemos supor contida en V e existen un número real $\varepsilon > 0$ e un fluxo local $\{\Phi_t \colon U \to M\}_{t \in I_\varepsilon}$ que define $X_{|U}$. Por conseguinte, dado que $\omega_q = \widetilde{\omega}_q$ para todo $q \in V$ e $U \subset V$, temos

$$(\mathcal{L}_X \omega)_q = \lim_{t \to 0} \frac{(\Phi_t^* \omega)_q - \omega_q}{t} = \lim_{t \to 0} \frac{(\Phi_t^* \widetilde{\omega})_q - \widetilde{\omega_q}}{t} = (\mathcal{L}_X \widetilde{\omega})_q,$$

é dicir, $(\mathcal{L}_X \omega)_{|U} = (\mathcal{L}_X \widetilde{\omega})_{|U}$. Agora ben, pola fórmula de derivación que xa comprobamos para $\mathcal{L}_X$ en (1) e tendo en conta a observación 4.5 e as propiedades (2) e (3) xa probadas do presente teorema, temos

$$\begin{aligned}
\mathcal{L}_X \widetilde{\omega} &= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \big(\mathcal{L}_X(f_{j_1 \cdots j_k}) \wedge dg^{j_1} \wedge \ldots \wedge dg^{j_k} + f_{j_1 \cdots j_k} \sum_{r=1}^{k} (dg^{j_1} \wedge \cdots \wedge \mathcal{L}_X(dg^{j_r}) \wedge \ldots \wedge dg^{j_k})\big) \\
&= \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} \big(X(f_{j_1 \cdots j_k}) dg^{j_1} \wedge \ldots \wedge dg^{j_k} + f_{j_1 \cdots j_k} \sum_{r=1}^{k} (dg^{j_1} \wedge \ldots \wedge d(X g^{j_r}) \wedge \ldots \wedge dg^{j_k})\big),
\end{aligned}$$

do que se segue que $\mathcal{L}_X \widetilde{\omega}$ é unha k-forma diferencial sobre M, e como coincide con $\mathcal{L}_X \omega$ na veciñanza aberta U de p, tense que $\mathcal{L}_X \omega$ é diferenciable nunha veciñanza aberta de cada un dos seus puntos; así concluímos que $\mathcal{L}_X \omega$ é unha k-forma diferencial sobre M. $\square$

Definición 4.14. O operador $\mathcal{L}_X$ chámase *derivada de Lie con respecto a* $X \in \mathcal{F}(M)$, e a forma diferencial $\mathcal{L}_X \omega$ dise que é a *derivada de Lie da forma diferencial* ω *con respecto do campo de vectores* X.

Proposición 4.15. *Para todo par de campos de vectores diferenciables* X *e* Y *sobre* M *verifícase*

$$\boldsymbol{\iota}_{[X,Y]} = [\mathcal{L}_X, \boldsymbol{\iota}_Y].$$

Demostración. Tanto $\boldsymbol{\iota}_{[X,Y]}$ como $[\mathcal{L}_X, \boldsymbol{\iota}_Y]$ son antiderivacións de grao -1 (ver 4.2), polo que abondará ver que toman os mesmos valores sobre as funcións e as diferenciais das funcións. Se $f \in \mathcal{F}(M)$ entón $\boldsymbol{\iota}_{[X,Y]}(f) = 0$ e, por outra banda,

$$[\mathcal{L}_X, \boldsymbol{\iota}_Y](f) = \mathcal{L}_X\big(\boldsymbol{\iota}_Y(f)\big) - \boldsymbol{\iota}_Y\big(\mathcal{L}_X(f)\big) = \mathcal{L}_X(0) - \boldsymbol{\iota}_Y(Xf) = 0.$$

Ademais,

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}_X, \boldsymbol{\iota}_Y](df) &= \mathcal{L}_X\big(\boldsymbol{\iota}_Y(df)\big) - \boldsymbol{\iota}_Y\big(\mathcal{L}_X(df)\big) = \mathcal{L}_X(df(Y)) - \boldsymbol{\iota}_Y(d(Xf))\\ &= \mathcal{L}_X(Yf) - (d(Xf))(Y) = X(Yf) - Y(Xf)\\ &= [X,Y]f = (df)[X,Y] = \boldsymbol{\iota}_{[X,Y]}(df).\end{aligned}$$

□

O seguinte resultado é trivial:

Proposición 4.16. *Se X e Y son campos de vectores diferenciables sobre M e $\lambda \in \mathbb{R}$, verifícase:*

(1) $\mathcal{L}_{X+Y} = \mathcal{L}_X + \mathcal{L}_Y$,

(2) $\mathcal{L}_{\lambda X} = \lambda\, \mathcal{L}_X$.

Observación 4.17. En xeral, $\mathcal{L}_{fX}$ non coincide con $f\mathcal{L}_X$. En efecto, se $h \in \mathcal{F}(M)$ entón

$$\big(\mathcal{L}_{fX}(dh)\big)_p = d((fX)h)_p = d((f(Xh))_p = (Xh)(p)(df)_p + f(p)d(Xh)_p,$$

e por outra banda

$$\big(f\mathcal{L}_X(dh)\big)_p = f(p)d(Xh)_p,$$

pero en xeral non podemos afirmar que $(Xh)(p)(df)_p$ sexa 0, agás nalgúns casos, como por exemplo que f sexa unha función constante en cada compoñente conexa de M.

Proposición 4.18. *Se $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ entón, para cada $X, X_1, \ldots, X_k \in \mathfrak{X}(M)$, tense*

$$\begin{aligned}(\mathcal{L}_X\omega)(X_1,\ldots,X_k) &= \mathcal{L}_X\big(\omega(X_1,\ldots,X_k)\big) - \sum_{j=1}^{k}\omega(X_1,\ldots,\mathcal{L}_X X_j,\ldots,X_k)\\ &= X\big(\omega(X_1,\ldots,X_k)\big) - \sum_{j=1}^{k}\omega(X_1,\ldots,[X,X_j],\ldots,X_k).\end{aligned}$$

Demostración. Como consecuencia da proposición 4.15, temos que

$$\boldsymbol{\iota}_{X_1}\mathcal{L}_X = \mathcal{L}_X\boldsymbol{\iota}_{X_1} - \boldsymbol{\iota}_{[X,X_1]}.$$

Ao compoñer con $\boldsymbol{\iota}_{X_2}$ pola esquerda,

$$\boldsymbol{\iota}_{X_2}\boldsymbol{\iota}_{X_1}\mathcal{L}_X = \boldsymbol{\iota}_{X_2}\mathcal{L}_X\boldsymbol{\iota}_{X_1} - \boldsymbol{\iota}_{X_2}\boldsymbol{\iota}_{[X,X_1]} = \mathcal{L}_X\boldsymbol{\iota}_{X_2}\boldsymbol{\iota}_{X_1} - \boldsymbol{\iota}_{[X,X_2]}\boldsymbol{\iota}_{X_1} - \boldsymbol{\iota}_{X_2}\boldsymbol{\iota}_{[X,X_1]}.$$

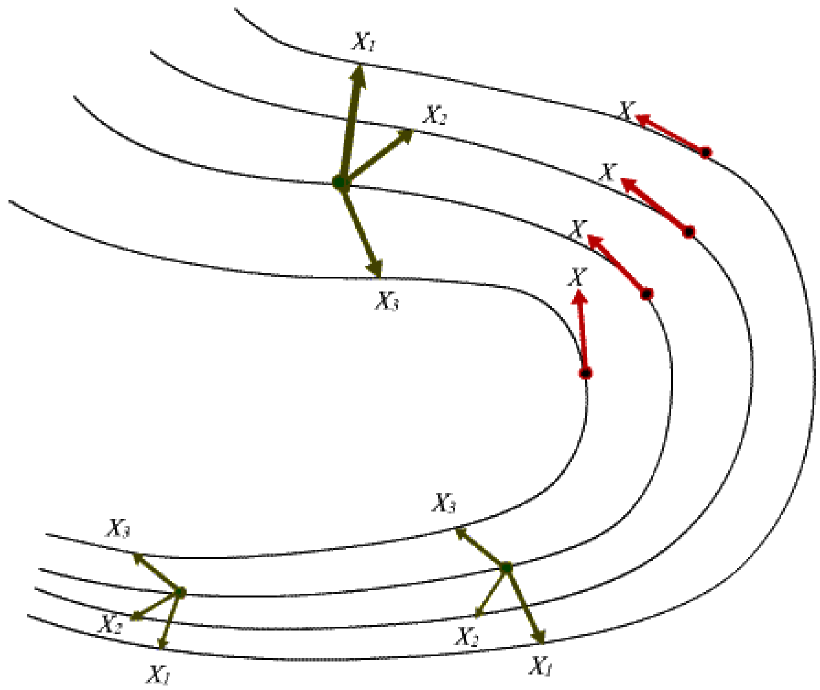
Se reiteramos o proceso,

$$\big(\boldsymbol{\iota}_{X_k}\ldots\boldsymbol{\iota}_{X_1}\mathcal{L}_X\big)\,\omega = \big(\mathcal{L}_X\boldsymbol{\iota}_{X_1}\ldots\boldsymbol{\iota}_{X_k}\big)\,\omega - \sum_{j=1}^{k}\big(\boldsymbol{\iota}_{X_k}\ldots\boldsymbol{\iota}_{[X,X_j]}\ldots\boldsymbol{\iota}_{X_1}\big)\,\omega,$$

é dicir,

$$(\mathcal{L}_X\omega)(X_1,\dots,X_k) = \mathcal{L}_X\big(\omega(X_1,\dots,X_k)\big) - \sum_{j=1}^{k} \omega(X_1,\dots,\mathcal{L}_X X_j,\dots,X_k). \qquad \square$$

Observación 4.19. A derivada de Lie $(\mathcal{L}_X\omega)(X_1,\dots,X_k)$ da unha medida da variación ao longo das curvas integrais de X do valor da forma ω aplicada a campos de vectores $X_1,\dots,X_k$ invariantes polo fluxo de X. Se a variedade é un aberto nun espazo euclidiano $\mathbb{R}^n$ e $\omega = dr^1 \wedge \cdots \wedge dr^n$ (a "forma de volume" de $\mathbb{R}^n$) entón $\mathcal{L}_X\omega$ mide como cambian os volumes polo fluxo $\{\Phi_t\}$ de X.



Proposición 4.20. *Se X e Y son campos de vectores diferenciables sobre M verifícase:*

$$[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y] = \mathcal{L}_{[X,Y]}.$$

Demostración. Tanto $[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y]$ como $\mathcal{L}_{[X,Y]}$ son derivacións de grao 0, polo que abondará ver que toman os mesmos valores sobre as funcións diferenciables reais sobre M e sobre as súas diferenciais para ver que son iguais. Pois ben, se $f \in \mathcal{F}(M)$ entón, pola propiedade (2) do teorema 4.13:

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}_X,\mathcal{L}_Y](f) &= \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y(f) - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X(f) = \mathcal{L}_X(Yf) - \mathcal{L}_Y(Xf)\\ &= X(Yf) - Y(Xf) = [X,Y](f) = \mathcal{L}_{[X,Y]}(f),\end{aligned}$$

e ademais

$$\begin{aligned}[\mathcal{L}_X, \mathcal{L}_Y](df) &= \mathcal{L}_X\mathcal{L}_Y(df) - \mathcal{L}_Y\mathcal{L}_X(df) = \mathcal{L}_X\big(d(Yf)\big) - \mathcal{L}_Y\big(d(Xf)\big)\\ &= d\big(X(Yf)\big) - d\big(Y(Xf)\big) = d\big(X(Yf) - Y(Xf)\big)\\ &= d\big([X,Y](f)\big) = \mathcal{L}_{[X,Y]}(df),\end{aligned}$$

onde aplicamos varias veces a propiedade (3) do teorema 4.13. □

4.4. A diferencial exterior

Un operador linear moi importante no estudo das variedades diferenciables é a diferencial exterior, que como imos ver, é unha extensión da diferencial ordinaria das funcións diferenciables. Aquí introducímolo a partir da derivada de Lie e do produto interior.

Teorema 4.21. *Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión n. Existe un único operador linear de grao $+1$*

$$\mathbf{d}\colon \mathcal{E}^*(M) \longrightarrow \mathcal{E}^*(M)$$

tal que

$$(\star) \qquad \mathcal{L}_X = \mathbf{d} \circ \boldsymbol{\iota}_X + \boldsymbol{\iota}_X \circ \mathbf{d}$$

para cada campo de vectores diferenciable X sobre M.

Demostración. Para probar a unicidade supoñamos que $\mathbf{d}$ e $\mathbf{d}'$ son operadores lineares sobre $\mathcal{E}^*(M)$ que satisfán $(\star)$. Probaremos que $\mathbf{d} = \mathbf{d}'$ por indución no grao das formas. Posto que para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ debe ser

$$\mathbf{d} \circ \boldsymbol{\iota}_X + \boldsymbol{\iota}_X \circ \mathbf{d} = \mathcal{L}_X = \mathbf{d}' \circ \boldsymbol{\iota}_X + \boldsymbol{\iota}_X \circ \mathbf{d}',$$

teremos, para cada $f \in \mathcal{F}(M)$,

$$\boldsymbol{\iota}_X(\mathbf{d} - \mathbf{d}')(f) = \mathbf{d}'(\boldsymbol{\iota}_X f) - \mathbf{d}(\boldsymbol{\iota}_X f) = 0,$$

por (1) do teorema 4.8, logo $\boldsymbol{\iota}_X(\mathbf{d}(f)) = \boldsymbol{\iota}_X(\mathbf{d}'(f))$, é dicir, $(\mathbf{d}(f))(X) = (\mathbf{d}'(f))(X)$ para cada $X \in \mathfrak{X}(M)$ e por tanto $\mathbf{d}(f) = \mathbf{d}'(f)$, co que $\mathbf{d}$ e $\mathbf{d}'$ coinciden en en $\mathcal{E}^0(M) = \mathcal{F}(M)$. Supoñamos agora que $\mathbf{d}$ e $\mathbf{d}'$ coinciden en $\mathcal{E}^{k-1}(M)$ e imos ver que coinciden en $\mathcal{E}^k(M)$. Se $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ entón $\boldsymbol{\iota}_X\omega \in \mathcal{E}^{k-1}(M)$, e pola hipótese de indución $\mathbf{d}(\boldsymbol{\iota}_X\omega) = \mathbf{d}'(\boldsymbol{\iota}_X\omega)$. Polo tanto,

$$0 = (\mathbf{d} - \mathbf{d}')\boldsymbol{\iota}_X\omega = \boldsymbol{\iota}_X(\mathbf{d}' - \mathbf{d})\omega.$$

Dado que $\mathbf{d}\,\omega - \mathbf{d}'\omega \in \mathcal{E}^{k+1}(M)$, se $X_1, \ldots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$ entón

$$(\mathbf{d}\,\omega - \mathbf{d}'\omega)(X_1, \ldots, X_{k+1}) = \big(\boldsymbol{\iota}_{X_1}(\mathbf{d}\,\omega - \mathbf{d}'\omega)\big)(X_2, \ldots, X_{k+1}) = 0,$$

logo $\mathbf{d}\omega = \mathbf{d}'\omega$.

Para probar a existencia procedemos tamén por indución. Definimos $\mathbf{d}$ en primeiro lugar para formas diferenciais de grao 0, de modo que coincida coa diferencial ordinaria das funcións,

$$\begin{aligned} \mathbf{d}\colon \mathcal{E}^0(M) &\longrightarrow \mathcal{E}^1(M) \\ f &\longmapsto \mathbf{d}f = df\colon X \in \mathfrak{X}(M) \mapsto (df)(X) = Xf. \end{aligned}$$

Trivialmente, $\mathbf{d}$ é $\mathbb{R}$-linear, e tense $\mathcal{L}_X f = d\boldsymbol{\iota}_X f + \boldsymbol{\iota}_X df$, xa que $\mathcal{L}_X f = Xf$ (por (2) do teorema 4.13) e por ser $\boldsymbol{\iota}_X f = 0$ e $\boldsymbol{\iota}_X df = (df)(X) = Xf$ (por (1) e (2) no teorema 4.8). Supoñamos que existe $\mathbf{d}$ definida en $\mathcal{E}^{k-1}(M)$ coas propiedades requiridas e imos definila en $\mathcal{E}^k(M)$.

Se ω é unha k-forma diferencial sobre M e $X_1, \dots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$, para ter $(\star)$ poñemos

$$(\star\star) \qquad \begin{aligned} \mathbf{d}\omega(X_1, \dots, X_{k+1}) &= (\boldsymbol{\iota}_{X_1}\mathbf{d}\omega)(X_2, \dots, X_{k+1}) \\ &= (\mathcal{L}_{X_1}\omega)(X_2, \dots, X_{k+1}) - (\mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_{X_1}\omega)(X_2, \dots, X_{k+1}). \end{aligned}$$

Vexamos que, así definida, $\mathbf{d}\omega$ é unha $(k+1)$-forma diferencial, é dicir

$$\mathbf{d}\omega\colon \mathfrak{X}(M) \times \overset{(k+1)}{\cdots} \times \mathfrak{X}(M) \longrightarrow \mathcal{F}(M)$$

é $\mathcal{F}(M)$-multilinear e antisimétrica. Agora ben, $\mathcal{L}_{X_1}\omega$ e $\mathbf{d}(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\omega) \in \mathcal{E}^k(M)$ son $\mathcal{F}(M)$-multilineares e e antisimétricas, $\mathfrak{X}(M) \times \overset{(k)}{\cdots} \times \mathfrak{X}(M) \to \mathcal{F}(M)$, a segunda pola hipótese de indución. Polo tanto, $\mathbf{d}\omega$ é $\mathcal{F}(M)$-multilinear e antisimétrica con respecto aos argumentos $2, \dots, k+1$. Falta ver que $\mathbf{d}\omega$ é $\mathcal{F}(M)$-multilinear respecto á primeira variable X_1, e que é antisimétrica respecto das variables primeira e i-ésima (para cada $i = 2, \dots, k+1$), ou equivalentemente, con respecto ás variables primeira X_1 e segunda X_2. Vexamos en primeiro lugar o carácter antisimétrico de $d\omega$. Tense

$$\begin{aligned} (\mathcal{L}_{X_2}\omega)(X_2, \dots, X_{k+1}) &= \big(\boldsymbol{\iota}_{X_2}(\mathcal{L}_{X_2}\omega)\big)(X_3, \dots, X_{k+1}) \\ &= \big(\mathcal{L}_{X_2}(\boldsymbol{\iota}_{X_2}\omega)\big)(X_3, \dots, X_{k+1}) - (\boldsymbol{\iota}_{[X_2,X_2]}\omega)(X_3, \dots, X_{k+1}) \\ &= \big(\mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_{X_2}\boldsymbol{\iota}_{X_2}\omega\big)(X_3, \dots, X_{k+1}) + \big(\boldsymbol{\iota}_{X_2}\mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_{X_2}\omega\big)(X_3, \dots, X_{k+1}) \\ &= \big(\boldsymbol{\iota}_{X_2}\mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_{X_2}\omega\big)(X_3, \dots, X_{k+1}), \end{aligned}$$

onde a segunda igualdade séguese da proposición 4.15 e a terceira da fórmula $(\star)$ no enunciado, $\mathcal{L}_{X_2} = \mathbf{d} \circ \boldsymbol{\iota}_{X_2} + \boldsymbol{\iota}_{X_2} \circ \mathbf{d}$, que se verifica aplicada a formas diferenciais de grao $k-1$, pola hipótese de indución. Obviamente, a última igualdade é consecuencia de $\boldsymbol{\iota}_{X_2}\boldsymbol{\iota}_{X_2} = 0$. Polo tanto,

$$(\mathcal{L}_{X_2}\omega)(X_2, \dots, X_{k+1}) = \big(\boldsymbol{\iota}_{X_2}\mathbf{d}(\boldsymbol{\iota}_{X_2}\omega)\big)(X_3, \dots, X_{k+1}) = \big(\mathbf{d}(\boldsymbol{\iota}_{X_2}\omega)\big)(X_2, X_3, \dots, X_{k+1}).$$

Así, da expresión ($\star\star$) para $\mathbf{d}\omega$ e a anterior igualdade, séguese

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}\omega)(X_2, X_2, \dots, X_{k+1}) &= \boldsymbol{\iota}_{X_2}(\mathbf{d}\omega)(X_2, \dots, X_{k+1}) \\ &= (\mathcal{L}_{X_2}\omega)(X_2, \dots, X_{k+1}) - \mathbf{d}(\boldsymbol{\iota}_{X_2}(\omega))(X_2, \dots, X_{k+1}) = 0.\end{aligned}$$

Isto proba a antisimetría de $\mathbf{d}\omega$, e como consecuencia tamén se deduce o carácter $\mathcal{F}(M)$-multilinear de $\mathbf{d}\omega$ respecto da primeira variable X_1, xa que

$$(\mathbf{d}\omega)(X_1, X_2, \dots, X_{k+1}) = -(\mathbf{d}\omega)(X_2, X_1, \dots, X_{k+1}).$$

Evidentemente, as aplicacións $\mathbf{d}\colon \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^{k+1}(M)$, que se teñen para $k = 0, 1, \dots, n$, son $\mathbb{R}$-lineares e esténdense por $\mathbb{R}$-linearidade para dar lugar a un único operador linear $\mathbf{d}\colon \mathcal{E}^*(M) \to \mathcal{E}^*(M)$ tal que $\mathbf{d}(\mathcal{E}^k(M)) \subset \mathcal{E}^{k+1}(M)$ e cumpre a ecuación ($\star$). □

Definición 4.22. O operador linear $\mathbf{d}\colon \mathcal{E}^*(M) \longrightarrow \mathcal{E}^*(M)$ definido polo teorema 4.21 chámase a *diferencial exterior* da álxebra exterior das formas diferenciais sobre M. A igualdade que o define,

$$\mathcal{L}_X = \mathbf{d} \circ \boldsymbol{\iota}_X + \boldsymbol{\iota}_X \circ \mathbf{d}, \qquad X \in \mathfrak{X}(M),$$

é a *fórmula de Cartan.*

Da fórmula de Cartan séguese inmediatamente que a diferencial das 0-formas é a diferencial ordinaria das funcións e tense unha expresión sinxela para a diferencial das formas de grao 1 que ven dada pola seguinte proposición.

Proposición 4.23. (a) *Para as funcións diferenciables (*0*-formas diferenciais sobre* M*), a diferencial exterior coincide coa diferencial ordinaria, é dicir,*

$$(\mathbf{d}f)(X) = (df)(X) = X(f), \qquad X \in \mathfrak{X}(M),\ f \in \mathcal{F}(M).$$

(b) *Se* ω *é unha forma diferencial de grao* 1 *sobre* M *entón*

$$(\mathbf{d}\,\omega)(X, Y) = X\big(\omega(Y)\big) - Y\big(\omega(X)\big) - \omega([X, Y]), \qquad X, Y \in \mathfrak{X}(M).$$

Demostración. Se $\omega = f \in \mathcal{E}^0(M)$ entón

$$(\mathbf{d}f)(X) = \boldsymbol{\iota}_X(\mathbf{d}f) = \mathcal{L}_X(f) - \mathbf{d}(\boldsymbol{\iota}_X f) = \mathcal{L}_X(f) = X(f).$$

Se $\omega \in \mathcal{E}^1(M)$ e $X, Y \in \mathfrak{X}(M)$, pola proposición 4.18 para $k = 1$ cúmprese

$$(\mathcal{L}_X\omega)(Y) = X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]),$$

e polo tanto, da fórmula de Cartan séguese

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}\,\omega)(X, Y) &= \big(\boldsymbol{\iota}_X(\mathbf{d}\,\omega)\big)(Y) = \big(\mathcal{L}_X\omega\big)(Y) - \big(\mathbf{d}(\boldsymbol{\iota}_X\omega)\big)(Y) \\ &= X(\omega(Y)) - \omega([X, Y]) - \big(\mathbf{d}(\omega(X)\big)(Y) \\ &= X(\omega(Y)) - Y(\omega(X)) - \omega([X, Y]).\end{aligned}$$

□

Temos a seguinte xeneralización, que proporciona unha expresión global da diferencial exterior dunha forma diferencial de calquera grao $k \geq 0$.

Proposición 4.24. *Se ω é unha k-forma diferencial sobre M entón $\mathbf{d}\omega$ é a forma diferencial de grao $k+1$ dada por*

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}\omega)(X_1, \ldots, X_{k+1}) = {} & \sum_{i=1}^{k+1}(-1)^{i+1} X_i\big(\omega(X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, X_{k+1})\big) \\ & + \sum_{1 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j}\omega([X_i, X_j], X_1, \ldots, \widehat{X}_i, \ldots, \widehat{X}_j, \ldots, X_{k+1}),\end{aligned}$$

onde $X_1, \ldots, X_{k+1} \in \mathfrak{X}(M)$, e $\widehat{X_i}$ indica que se omite o termo correspondente.

Demostración. Pola proposición anterior, a ecuación do enunciado é válida para $k = 0$ e $k = 1$. Supoñemos que a ecuación é válida para as formas diferenciais de grao $k - 1$ e imos probala para as k-formas diferenciais. Así, se $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$, pola fórmula de Cartan, a proposición 4.18 e a hipótese de indución,

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}\,\omega)(X_1, \ldots, X_{k+1}) &= \big(\boldsymbol{\iota}_{X_1}(\mathbf{d}\,\omega)\big)(X_2, \ldots, X_{k+1}) \\ &= \big(\mathcal{L}_{X_1}\omega\big)(X_2, \ldots, X_{k+1}) - \big(\mathbf{d}(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\omega)\big)(X_2, \ldots, X_{k+1}) \\ &= X_1\big(\omega(X_2, \ldots, X_{k+1})\big) - \sum_{j=2}^{k+1}\omega(X_2, \ldots, [X_1, X_j], \ldots, X_{k+1}) \\ &\quad - \sum_{i=2}^{k+1} X_i\big((\boldsymbol{\iota}_{X_1}\omega)(X_2, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{k+1})\big) \\ &\quad - \sum_{2 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j}\big(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\omega\big)([X_i, X_j], X_2, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{k+1}) \\ &= X_1\big(\omega(X_2, \ldots, X_{k+1})\big) - \sum_{i=2}^{k+1} X_i\big(\omega(X_1, X_2, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, X_{k+1})\big) \\ &\quad - \sum_{j=2}^{k+1}(-1)^{j-2}\omega([X_1, X_j], X_2, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{k+1}) \\ &\quad + \sum_{2 \leq i < j \leq k+1} (-1)^{i+j}\big(\omega([X_i, X_j], X_1, X_2, \ldots, \widehat{X_i}, \ldots, \widehat{X_j}, \ldots, X_{k+1}),\end{aligned}$$

co que se ten a igualdade no enunciado. □

Unha caracterización alternativa da diferencial exterior ven dada polo seguinte teorema, que tamén afirma que $\mathbf{d}$ é unha antiderivación.

Teorema 4.25. *A diferencial exterior é o único operador linear $\mathbf{d}\colon \mathcal{E}^*(M) \to \mathcal{E}^*(M)$ que satisfai as seguintes propiedades:*

(1) $\mathbf{d}$ *é unha antiderivación de grao* $+1$.

(2) *Para cada función* $f \in \mathcal{E}^0(M)$, $\mathbf{d}f$ *é a diferencial (ordinaria) de* f.

(3) $\mathbf{d}^2 = \mathbf{d} \circ \mathbf{d} = 0$.

Demostración. Para probar a unicidade, supoñamos que $\mathbf{d}$ e $\mathbf{d}'$ son operadores lineares nas condicións do enunciado. Xa que son antiderivacións, están determinados pola su actuación sobre os elementos de $\mathcal{E}^0(M)$ e as súas diferenciais (proposición 4.7). Agora ben, por (2), $\mathbf{d}f = df = \mathbf{d}'f$, e por (3), $\mathbf{d}(df) = \mathbf{d}(\mathbf{d}f) = 0 = \mathbf{d}'(\mathbf{d}'f) = \mathbf{d}'(df)$. Polo tanto, $\mathbf{d} = \mathbf{d}'$.

Imos probar que a diferencial exterior $\mathbf{d}\colon \mathcal{E}(M) \to \mathcal{E}(M)$ definida pola fórmula de Cartan verifica as propiedades do enunciado. O carácter linear xa é consecuencia do teorema 4.21, así como que é de grao $+1$. Tamén se verifica (2), como se ve na proposición 4.23. Para probar que é unha antiderivación, veremos que se $\omega \in \mathcal{E}^r(M)$ e $\eta \in \mathcal{E}^s(M)$ entón

$$\mathbf{d}(\omega \wedge \eta) = (\mathbf{d}\,\omega) \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge \mathbf{d}\,\eta.$$

A fórmula é válida para $r+s=0$, xa que nese caso $\omega = f, \eta = g \in \mathcal{F}(M)$ e $\omega \wedge \eta = f \wedge g = fg$, e entón

$$\mathbf{d}(f \wedge g) = d(fg) = (df)g + f(dg) = \mathbf{d}f \wedge g + (-1)^0 f \wedge \mathbf{d}g,$$

xa que se $X \in \mathfrak{X}(M)$, tense

$$d(fg)(X) = X(fg) = X(f)g + fX(g) = (df)(X)g + f(dg)(X) = ((df)g + f(dg))(X).$$

Supoñemos agora que a fórmula é certa para $r+s = k-1$ e probarémola para $r+s=k$. Sexan $\omega \in \mathcal{E}^r(M)$, $\eta \in \mathcal{E}^s(M)$. Entón, se $X_1, \dots, X_{r+s+1} \in \mathfrak{X}(M)$,

$$\mathbf{d}(\omega \wedge \eta)(X_1, \dots, X_{r+s+1}) = \big(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\mathbf{d}(\omega \wedge \eta)\big)(X_2, \dots, X_{r+s+1}).$$

Pola fórmula de Cartan, e utilizando que $\mathcal{L}_{X_1}$ é unha derivación e $\boldsymbol{\iota}_{X_1}$ unha antiderivación,

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\iota}_{X_1}\mathbf{d}(\omega \wedge \eta) &= \mathcal{L}_{X_1}(\omega \wedge \eta) - \mathbf{d}\boldsymbol{\iota}_{X_1}(\omega \wedge \eta) \\ (*) \qquad &= \mathcal{L}_{X_1}(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_{X_1}(\eta) - \mathbf{d}\big(\boldsymbol{\iota}_{X_1}(\omega) \wedge \eta + (-1)^r(\omega \wedge \boldsymbol{\iota}_{X_1}(\eta))\big). \end{aligned}$$

Pola hipótese de indución para $\mathbf{d}$ sobre formas con suma de graos $r+s-1$, tense

$$\mathbf{d}\big(\boldsymbol{\iota}_{X_1}(\omega) \wedge \eta\big) = \mathbf{d}(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\omega) \wedge \eta + (-1)^{r-1}(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\omega) \wedge \mathbf{d}\eta = \mathbf{d}(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\omega) \wedge \eta + (-1)^r(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\omega) \wedge \mathbf{d}\eta,$$
$$\mathbf{d}\big((-1)^r(\omega \wedge \boldsymbol{\iota}_{X_1}(\eta))\big) = (-1)^r(\mathbf{d}\,\omega) \wedge \boldsymbol{\iota}_{X_1}(\eta) + (-1)^r(-1)^r(\omega \wedge \mathbf{d}\big(\boldsymbol{\iota}_{X_1}(\eta)\big).$$

Polas igualdades anteriores, de $(*)$ séguese:

$$\begin{aligned} \boldsymbol{\iota}_{X_1}\mathbf{d}(\omega \wedge \eta) = \mathcal{L}_{X_1}(\omega) \wedge \eta + \omega \wedge \mathcal{L}_{X_1}(\eta) - \mathbf{d}(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\omega) \wedge \eta + (-1)^r(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\omega) \wedge \mathbf{d}\eta \\ + (-1)^{r+1}(\mathbf{d}\,\omega) \wedge \boldsymbol{\iota}_{X_1}(\eta) - (\omega \wedge \mathbf{d}\big(\boldsymbol{\iota}_{X_1}(\eta)\big), \end{aligned}$$

e aplicando outra vez a fórmula de Cartan,

$$\begin{aligned}\boldsymbol{\iota}_{X_1}\mathbf{d}(\omega\wedge\eta) &= \big(\mathbf{d}\,\boldsymbol{\iota}_{X_1}\omega\big)\wedge\eta + \big(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\mathbf{d}\,\omega\big)\wedge\eta + \omega\wedge\big(\mathbf{d}\,\boldsymbol{\iota}_{X_1}\eta\big) + \omega\wedge\big(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\mathbf{d}\,\eta\big) - \mathbf{d}(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\omega)\wedge\eta\\ &\quad + (-1)^r(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\omega)\wedge\mathbf{d}\eta + (-1)^{r+1}(\mathbf{d}\,\omega)\wedge\boldsymbol{\iota}_{X_1}(\eta) - \omega\wedge\mathbf{d}\big(\boldsymbol{\iota}_{X_1}(\eta)\big)\\ &= \big(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\mathbf{d}\omega\big)\wedge\eta + (-1)^{r+1}(\mathbf{d}\,\omega)\wedge\boldsymbol{\iota}_{X_1}(\eta) + \omega\wedge\big(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\mathbf{d}\,\eta\big) + (-1)^r(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\omega)\wedge\mathbf{d}\eta\\ &= \boldsymbol{\iota}_{X_1}(\mathbf{d}\,\omega\wedge\eta) + (-1)^r\boldsymbol{\iota}_{X_1}(\omega\wedge\mathbf{d}\,\eta),\end{aligned}$$

por ser $\boldsymbol{\iota}_{X_1}$ unha antiderivación. Polo tanto, tense

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(\omega\wedge\eta)(X_1,\dots,X_{r+s+1}) &= \big(\boldsymbol{\iota}_{X_1}\mathbf{d}(\omega\wedge\eta)\big)(X_2,\dots,X_{r+s+1})\\ &= \big(\boldsymbol{\iota}_{X_1}(\mathbf{d}\omega\wedge\eta)\big)(X_2,\dots,X_{r+s+1}) + (-1)^r\big(\boldsymbol{\iota}_{X_1}(\omega\wedge\mathbf{d}\,\eta)\big)(X_2,\dots,X_{r+s+1})\\ &= (\mathbf{d}\,\omega\wedge\eta)(X_1,X_2,\dots,X_{r+s+1}) + (-1)^r(\omega\wedge\mathbf{d}\,\eta)(X_1,X_2,\dots,X_{r+s+1}),\end{aligned}$$

co que queda probado (1). Agora, como consecuencia da proposición 4.2, $\mathbf{d}^2 = \mathbf{d}\circ\mathbf{d}$ é unha derivación de grao 2, e polo tanto, está determinada pola súa actuación sobre as funcións diferenciables e sobre as súas diferenciais. Abonda probar que $\mathbf{d}^2(f) = 0$ para cada $f\in\mathcal{F}(M)$, porque como $\mathbf{d}f = df$, entón tamén será $\mathbf{d}^2(df) = \mathbf{d}(\mathbf{d}^2 f) = 0$. E, en efecto, para cada $X\in\mathfrak{X}(M)$, pola fórmula de Cartan,

$$\boldsymbol{\iota}_X(\mathbf{d}^2 f) = \boldsymbol{\iota}_X\mathbf{d}(\mathbf{d}f) = \mathcal{L}_X(\mathbf{d}f) - \mathbf{d}\big(\boldsymbol{\iota}_X(\mathbf{d}f)\big) = \mathcal{L}_X(df) - d(Xf) = 0,$$

por (3) do teorema 4.13. Por tanto $(\mathbf{d}^2 f)(X,Y) = 0$ para cada $X,Y\in\mathfrak{X}(M)$, é dicir $\mathbf{d}^2 = 0$, o que proba (3). □

Observación 4.26. Pola proposición 4.6, a antiderivación $\mathbf{d}\colon\mathcal{E}^*(M)\to\mathcal{E}^*(M)$ de grao +1 define, para cada aberto U en M, unha única antiderivación $\mathbf{d}_U\colon\mathcal{E}^*(U)\to\mathcal{E}^*(U)$, do mesmo grao, tal que para cada $\omega\in\mathcal{E}^*(M)$ é

$$(\mathbf{d}\omega)_{|U} = \mathbf{d}_U(\omega|U).$$

É doado ver que $\mathbf{d}_U$ é a diferencial exterior da álxebra exterior das formas diferenciais sobre U. Para isto, polo teorema 4.25, abonda ver que para cada función $f\in\mathcal{F}(U)$, tense que $\mathbf{d}_U(f) = df$ (a diferencial ordinaria de f en U) e $\mathbf{d}_U(df) = 0$.

Sexa entón $f\in\mathcal{F}(U)$ e $p\in U$. Polo corolario 1.11, podemos considerar unha veciñanza aberta V de p, con $\overline{V}\subset U$, e unha función $g\in\mathcal{F}(M)$ tal que $g_{|V} = f_{|V}$. Pola forma de construír na proposición 4.6 a antiderivación inducida tense, para cada vector tanxente $v\in T_p(M)$,

$$(\mathbf{d}_U f)_p(v) = (\mathbf{d}g)_p(v) = (dg)_p(v) = v(g) = v(f) = (df)_p(v),$$

é dicir, $\mathbf{d}_U(f) = df$. Por outra banda, de $g_{|V} = f_{|V}$, séguese que $(dg)_q = (df)_q$ para todo $q \in V$, logo $(dg)_{|V} = (df)_{|V}$, e polo tanto, tamén pola construción da antiderivación inducida,

$$\big(\mathbf{d}_U(\mathbf{d}_U(f))\big)_p = (\mathbf{d}_U(df))_p = (\mathbf{d}(dg))_p = (\mathbf{d}(\mathbf{d}(g))_p = 0.$$

A anterior igualdade tamén é válida para cada punto en U e para toda función $f \in \mathcal{F}(U)$, logo $\mathbf{d}_U^2 = 0$ e, polo teorema 4.25, $\mathbf{d}_U \colon \mathcal{E}^*(U) \to \mathcal{E}^*(U)$ é a diferencial exterior (que habitualmente tamén denotamos simplemente $\mathbf{d}$).

A expresión da diferencial exterior dunha k-forma diferencial na proposición 4.24 é global, non depende do uso de coordenadas na variedade. Imos dar agora a expresión en coordenadas locais.

Corolario 4.27. *Sexa (U, φ) unha carta de M, onde $\varphi = (x^1, \ldots, x^n)$. Se ω é unha k-forma diferencial sobre M e a expresión local de ω en (U, φ) é*

$$\omega_{|U} = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} a_{j_1 \cdots j_k}\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k},$$

entón

$$(\mathbf{d}\omega)_{|U} = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} da_{j_1 \cdots j_k} \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} = \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{j_1 \cdots j_n}}{\partial x^i}\, dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}.$$

Demostración. A primeira igualdade na expresión de $(\mathbf{d}\omega)_{|U}$ é consecuencia inmediata de que, pola observación anterior, $(\mathbf{d}\omega)_{|U} = \mathbf{d}_U(\omega_{|U})$ e $\mathbf{d}_U$ é a diferencial exterior en U e polo tanto coincide coa diferencial ordinaria sobre as funcións $a_{j_1 \cdots j_k} \in \mathcal{F}(U)$, anúlase sobre as diferenciais das funcións coordenadas $dx^{j_i} \in \mathcal{F}(U)$ e é unha antiderivación (e da observación 4.5). A segunda igualdade séguese da expresión local da diferencial dunha función (ver 3.18). □

Proposición 4.28. *A diferencial exterior conmuta coa derivada de Lie,*

$$\mathcal{L}_X \circ \mathbf{d} = \mathbf{d} \circ \mathcal{L}_X, \qquad X \in \mathfrak{X}(M).$$

Demostración. Por (b) da proposición 4.2, ao ser $\mathcal{L}_X$ unha derivación de grao 0 e $\mathbf{d}$ unha antiderivación de grao $+1$, tense que $[\mathcal{L}_X, \mathbf{d}] = \mathcal{L}_X \circ \mathbf{d} - \mathbf{d} \circ \mathcal{L}_X$ é unha antiderivación (de grao $+1$). Abondará logo probar que $[\mathcal{L}_X, \mathbf{d}]$ se anula sobre as funcións diferenciables e as súas diferenciais. Sexan $f \in \mathcal{F}(M)$ e $X \in \mathfrak{X}(M)$. Por (2) e (3) do teorema 4.13,

$$[\mathcal{L}_X, \mathbf{d}](f) = \mathcal{L}_X(\mathbf{d}f) - \mathbf{d}(\mathcal{L}_X f) = \mathcal{L}_X(df) - d(\mathcal{L}_X f) = d(Xf) - d(Xf) = 0,$$

e usando outra vez que $\mathcal{L}_X(df) = d(\mathcal{L}_X f)$,

$$[\mathcal{L}_X, \mathbf{d}](f) = \mathcal{L}_X\big(\mathbf{d}(df)\big) - \mathbf{d}\big(\mathcal{L}_X(df)\big) = 0 - \mathbf{d}\big(\mathcal{L}_X(df)\big) = -\mathbf{d}\big(d(\mathcal{L}_X f)\big) = 0.$$ □

Unha propiedade importante da diferencial exterior é que conmuta co homomorfismo inducido entre álxebras graduadas de formas diferenciais (3.25) por unha aplicación diferenciable entre as variedades.

Proposición 4.29 (A naturalidade da diferencial exterior)**.** *Se $f\colon M \to N$ é unha aplicación diferenciable entre variedades diferenciables e $f^*\colon \mathcal{E}^*(N) \to \mathcal{E}^*(M)$ é o homomorfismo de álxebras inducido entón*

$$\mathbf{d} \circ f^* = f^* \circ \mathbf{d}.$$

Demostración. Debemos ver que, para cada $k \geq 0$, o seguinte diagrama é conmutativo:

$$\begin{tikzcd} \mathcal{E}^k(M) \arrow[r, "\mathbf{d}"] & \mathcal{E}^{k+1}(M) \\ \mathcal{E}^k(N) \arrow[u, "f^*"] \arrow[r, "\mathbf{d}"'] & \mathcal{E}^{k+1}(N) \arrow[u, "f^*"'] \end{tikzcd}$$

En primeiro lugar, se $k = 0$, dada $h \in \mathcal{E}^0(N) = \mathcal{F}(N)$, temos $f^*(\mathbf{d}h) = \mathbf{d}(f^*h)$, por (3) en 3.25. Supoñamos agora que $\omega \in \mathcal{E}^k(N)$, $k \geq 1$, e imos demostrar que as $(k+1)$-formas diferenciais $\mathbf{d}(f^*\omega)$ e $f^*(\mathbf{d}\omega)$ sobre M coinciden. Para isto, sexan $p \in M$ e (V, ψ) unha carta de N tal que $f(p) \in V$, $\psi = (y^1, \dots, y^n)$, e consideramos a veciñanza aberta $U = f^{-1}(V)$ de p. Supoñemos que a expresión local de ω en (V, ψ) é

$$\omega_{|V} = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} b_{j_1 \cdots j_k}\, dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k},$$

e polo corolario 4.27,

$$\mathbf{d}\omega_{|V} = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} db_{j_1 \cdots j_k} \wedge dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k}.$$

Por outra banda (véxase (4) en 3.25),

$$(f^*\omega)_{|U} = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} (b_{j_1 \cdots j_k} \circ f)\, d(y^{j_1} \circ f) \wedge \cdots \wedge d(y^{j_k} \circ f),$$

de onde, pola observación 4.26 e por ser $\mathbf{d}$ unha antiderivación,

$$\big(\mathbf{d}(f^*\omega)\big)_{|U} = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} d(b_{j_1 \cdots j_k} \circ f) \wedge d(y^{j_1} \circ f) \wedge \cdots \wedge d(y^{j_k} \circ f).$$

Por tanto, outra vez por 3.25,

$$\begin{aligned}
\big(\mathbf{d}(f^*\omega)\big)_p &= \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n} \big(d(b_{j_1\cdots j_k}\circ f)\big)_p \wedge \big(d(y^{j_1}\circ f) \wedge \cdots \wedge \big(d(y^{j_k}\circ f)\big)_p \\
&= \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n} f_p^*(db_{j_1\cdots j_k})_{f(p)} \wedge f_p^*(dy^{j_1})_{f(p)} \wedge \cdots \wedge f_p^*(dy^{j_k})_{f(p)} \\
&= \sum_{1\leq j_1<\cdots<j_k\leq n} f_p^*\big(\mathbf{d}(b_{j_1\cdots j_k} \wedge dy^{j_1} \wedge \cdots \wedge dy^{j_k})\big)_{f(p)} \\
&= f_p^*(\mathbf{d}\omega)_{f(p)} = \big(f^*(\mathbf{d}\omega)\big)_p,
\end{aligned}$$

o que proba que $\big(\mathbf{d}(f^*\omega)\big)_p = \big(f^*(\mathbf{d}\omega)\big)_p$ para cada punto $p \in M$. $\square$

4.5. Formas pechadas e exactas. Lema de Poincaré

Definición 4.30. Dise que unha forma diferencial $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$ é *pechada* se $\mathbf{d}\omega = 0$, e que é *exacta* se existe unha forma diferencial $\eta \in \mathcal{E}^{k-1}(M)$ tal que $\omega = \mathbf{d}\eta$.

Observación 4.31. Toda forma exacta é pechada, xa que $\mathbf{d}\circ\mathbf{d} = 0$, pero non toda forma pechada é exacta, como se pode ver co seguinte exemplo clásico.

Se $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ e $\mathrm{id}_M = (x,y)$ é o sistema de coordenadas identidade de M, entón

$$\omega = \frac{1}{x^2+y^2}(-y\,dx + x\,dy)$$

é unha forma diferencial pechada de grao 1 sobre M,

$$\mathbf{d}\omega = d\Big(\frac{-y}{x^2+y^2}\Big) \wedge dx + d\Big(\frac{x}{x^2+y^2}\Big) \wedge dy = \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dy\wedge dx + \frac{y^2-x^2}{(x^2+y^2)^2}\,dx \wedge dy = 0.$$

Agora ben, ω non é exacta, xa que se η é unha forma tal que $\mathbf{d}\eta = \omega$ daquela η debe ser unha función diferenciable $f\colon M \to \mathbb{R}$ tal que $(\partial f/\partial x)\,dx + (\partial f/\partial y)\,dy = \omega$, é dicir,

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \frac{-y}{x^2+y^2}\,, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2}\,,$$

polo que, agás unha constante aditiva, ten que ser

$$f(x,y) = \arctan(y/x)$$

para cada $(x,y) \in M$. Pero unha función f tal non está definida en todo M, así é que a 1-forma ω non é exacta na subvariedade aberta M de $\mathbb{R}^2$. Observamos que a 1-forma ω sería exacta se o seu dominio fose, por exemplo, o semiplano superior aberto de $\mathbb{R}^2$. A terminoloxía "pechada" baséase na analoxía coas cadeas na homoloxía singular que son ciclos, isto é, nas que se anula o operador fronteira. O termo "exacta" para as formas é clásico, xa que as formas diferenciais denomínábanse "diferenciais", de modo que esta diferencial chamouse "exacta" se era realmente a diferencial de algo. A relación entre as formas e as cadeas é aínda maior, como suxire o exemplo da forma pechada non exacta ω sobre o plano sen a orixe; en $M = \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ pode atoparse tamén unha cadea pechada (un ciclo) que non é a fronteira ∂c de ningunha cadea c sen máis que considerar unha curva pechada que rodea a orixe. De feito, esta propiedade pode seguirse da versión da fórmula de Stokes que relaciona o operador diferencial exterior de formas diferenciais e a fronteira de cadeas singulares (Warner, [16, p. 144]),

$$\int_{\partial c} \eta = \int_c \omega, \qquad \text{se } \omega = \mathbf{d}\eta.$$

O operador diferencial exterior é tamén o operador (co)fronteira para unha teoría de cohomoloxía, a cohomoloxía de De Rham.

• **4.32.** O espazo vectorial real $\mathcal{E}^*(M)$ das formas diferenciais sobre unha variedade diferenciable M de dimensión n co operador diferencial exterior $\mathbf{d}$ define o *complexo de De Rham* de M, que é o complexo de cocadeas dado pola sucesión de espazos vectoriais coa aplicación linear diferencial exterior en cada grao

$$0 \longrightarrow \mathcal{E}^0(M) \xrightarrow{\mathbf{d}} \mathcal{E}^1(M) \xrightarrow{\mathbf{d}} \cdots \xrightarrow{\mathbf{d}} \mathcal{E}^k(M) \xrightarrow{\mathbf{d}} \cdots$$

Consideramos para cada $k \geq 0$ os subespazos vectoriais $Z^k(M)$ e $B^k(M)$ de $E^k(M)$ de formas pechadas e formas exactas, respectivamente,

$$Z^k(M) = \{\omega \in \mathcal{E}^k(M) \mid \mathbf{d}\omega = 0\}, \qquad B^k(M) = \{\omega \in \mathcal{E}^k(M) \mid \omega = \mathbf{d}\eta, \eta \in \mathcal{E}^{k-1}(M)\}.$$

Xa que toda forma exacta é pechada, $B^k(M)$ é un subespazo vectorial de $Z^k(M)$. O espazo vectorial cociente

$$H^k(M) = Z^k(M)/B^k(M), \qquad k = 0, 1, \ldots, n,$$

denomínase k-ésimo *grupo de cohomoloxía de De Rham* de M, e mide ata que punto hai k-formas pechadas sobre M que non son exactas. Se $\omega \in Z^k(M)$, denótase con $[\omega]$ a súa clase de equivalencia, que é a *clase de cohomoloxía* de ω.

Considérase o espazo vectorial real

$$H^*(M) = \bigoplus_{k \in \mathbb{Z}} H^k(M) = H^0(M) \oplus H^1(M) \oplus \cdots \oplus H^n(M), \qquad n = \dim M.$$

Se $\omega \in \mathcal{E}^r(M)$ e $\eta \in \mathcal{E}^s(M)$, a propiedade de antiderivación da diferencial exterior

$$\mathbf{d}(\omega \wedge \eta) = \mathbf{d}\omega \wedge \eta + (-1)^r \omega \wedge \mathbf{d}\eta, \qquad \omega \wedge \eta = (-1)^{rs} \eta \wedge \omega,$$

da lugar a un produto exterior ben definido en cohomoloxía

$$\begin{aligned}\wedge\colon H^r(M)\times H^s(M) &\longrightarrow H^{r+s}(M)\\ ([\omega],[\eta]) &\longmapsto [\omega]\wedge[\eta]=[\omega\wedge\eta],\end{aligned}$$

que converte a $H^*(M)$ nunha álxebra graduada anticonmutativa.

Se N é outra variedade diferenciable e $f\colon M\to N$ é unha aplicación diferenciable, a naturalidade da diferencial exterior (proposición 4.29) da lugar a unha aplicación de complexos de cocadeas de grao 0,

$$\begin{tikzcd}
\cdots \arrow[r] & \mathcal{E}^{k-1}(M) \arrow[r, "\mathbf{d}"] & \mathcal{E}^k(M) \arrow[r, "\mathbf{d}"] & \mathcal{E}^{k+1}(M) \arrow[r] & \cdots \\
\cdots \arrow[r] & \mathcal{E}^{k-1}(N) \arrow[r, "\mathbf{d}"] \arrow[u, "f^*"] & \mathcal{E}^k(N) \arrow[r, "\mathbf{d}"] \arrow[u, "f^*"'] & \mathcal{E}^{k+1}(N) \arrow[r] \arrow[u, "f^*"'] & \cdots
\end{tikzcd}$$

e polo tanto define unha aplicación linear en cohomoloxía para cada k,

$$\begin{aligned}H^k(f)\colon H^k(N) &\longrightarrow H^k(M)\\ [\omega] &\longmapsto H^k(f)([\omega]=[f^*(\omega)],\end{aligned}$$

que tamén da lugar a é un homomorfismo de álxebras $H^*(f)\colon H^*(N)\to H^*(M)$, xa que

$$H^*(f)([\omega]\wedge[\eta])=H^*(f)([\omega])\wedge H^*(f)([\eta]).$$

Pódense considerar así o functores contravariantes H^k da categoría de variedades diferenciables na de espazos vectoriais reais e H^* da categoría de variedades na de álxebras graduadas anticonmutativas. En particular, se dúas variedades diferenciables son difeomorfas entón as súas álxebras de cohomoloxía de De Rham son álxebras graduadas isomorfas, o que fai que a cohomoloxía de De Rham sexa un invariante por difeomorfismos moi importante.

Dado que non hai formas de grao -1 (xa convimos en 3.23 que $\mathcal{E}^{-1}(M)=0$), logo $H^0(M)=Z^0(M)$, co que se vai ver facilmente que $H^0(M)$ é o subespazo vectorial de $\mathcal{F}(M)$ das funcións constantes en cada compoñente conexa de M:

Proposición 4.33. *Se M é unha variedade diferenciable con l compoñentes conexas entón $H^0(M)=\mathbb{R}^l$.*

Demostración. Sexa f un elemento de $Z^0(M)$, isto é, $f\in\mathcal{E}^0(M)=\mathcal{F}(M)$ tal que $df=0$. Imos ver que f é constante nunha veciñanza aberta de cada punto de M. Sexa $p\in M$ e (U,φ) unha carta de M, tal que U é conexo e $p\in U$. Se $\varphi=(x^1,\dots,x^n)$ entón (3.18)

$$(df)_{|U}=\sum_{j=1}^n\frac{\partial f}{\partial x^j}\,dx^j=0,$$

e como $dx^1, \dots, dx^n$ son linearmente independentes en cada punto de U tense que $\partial f/\partial x^j$ se anula en U para cada $j = 1, \dots, n$, co que a diferencial $d(f \circ \varphi^{-1})\colon \varphi(U) \subset \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ tamén se anula no aberto conexo $\varphi(U)$ de $\mathbb{R}^n$, co que $f \circ \varphi^{-1}$ é constante en $\varphi(U)$ e polo tanto f toma un valor constante $q \in \mathbb{R}$ na veciñanza aberta U de p. Así, o conxunto pechado $W = f^{-1}(\{q\})$ tamén é aberto en M e polo tanto f é constante na compoñente conexa de p.

Dedúcese que se $df = 0$ entón f é constante en cada compoñente conexa de M, así que se M ten l compoñentes conexas $M_1, \dots, M_l$, f está ben determinada por un conxunto ordenado de l números reais, é dicir,

$$\begin{aligned} H^0(M) = Z^0(M) &= \{f_{|M_j} = q_j \mid q_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \dots, l\} \\ &\cong \{(q_1, \dots, q_l) \mid q_j \in \mathbb{R},\ j = 1, \dots, l\} \\ &= \mathbb{R}^l. \end{aligned}$$

□

Observación 4.34. A proba da proposición anterior pódese estender trivialmente para probar que a dimensión do espazo vectorial $H^0(M)$ coincide co número de compoñentes conexas de M. Tense en particular que M é conexa se, e só se, $H^0(M) = \mathbb{R}$. No caso en que a variedade diferenciable M sexa segundo numerable a familia de compoñentes conexas de M é ao sumo numerable, e se non é finita entón $H^0(M) = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Exemplo 4.35. (*A cohomoloxía de* $\mathbb{R}$)

Pola proposición anterior, $H^0(\mathbb{R}) = \mathbb{R}$. Ademais, para cada $k > 1$, dado que $\mathcal{E}^k(\mathbb{R}) = 0$, tense $H^k(\mathbb{R}) = 0$. Soamente queda por calcular $H^1(\mathbb{R}) = Z^1(\mathbb{R})/B^1(\mathbb{R})$.

Como $\mathbf{d}\colon \mathcal{E}^1(\mathbb{R}) \to \mathcal{E}^2(\mathbb{R}) = 0$ é cero, cada 1-forma diferencial ω sobre $\mathbb{R}$ é pechada, é dicir, $Z^1(\mathbb{R}) = \mathcal{E}^1(\mathbb{R})$. Pois ben, se $\omega \in \mathcal{E}^1(\mathbb{R})$ entón $\omega = f\,dr$, onde $f\colon M \to \mathbb{R}$ é unha función diferenciable (C^∞) e r é a coordenada identidade de $\mathbb{R}$, e abonda aplicar o teorema fundamental do cálculo para obter unha 0-forma h sobre $\mathbb{R}$ tal que $\mathbf{d}h = dh = \omega$. En efecto se $h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ está definida por

$$h(x) = \int_0^x f(t)\,dt, \qquad x \in \mathbb{R},$$

entón h é diferenciable C^∞ e $h'(x) = f(x)$, logo $dh = (\partial h/\partial r)\,dr = f\,dr = \omega$. Polo tanto, $Z^1(\mathbb{R}) = B^1(\mathbb{R})$, co que $H^1(\mathbb{R}) = 0$. Conclúese que $H^*(\mathbb{R}) = H^0(\mathbb{R}) \oplus H^1(\mathbb{R}) = \mathbb{R} \oplus 0$.

Na proposición 4.33 aparece o feito de que as 0-formas diferenciais pechadas non nulas nunca son exactas e xa se veu na observación 4.31 que para $k \geq 1$ hai variedades como $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ con formas pechadas que non son exactas. Ademais, como acabamos de ver no anterior exemplo, é moi sinxelo calcular a cohomoloxía de $\mathbb{R}$. Polo contrario o cálculo da cohomoloxía de De Rham de $\mathbb{R}^n$ para $n > 1$ non é inmediato. Para $k = 1, 2, 3$, o primeiro en calcular $H^k(\mathbb{R}^n)$ foi Henri Poincaré en 1887. Hoxe en día o resultado xeral para a cohomoloxía de $\mathbb{R}^n$ e algunhas xeneralizacións coñécese como lema de Poincaré.

De feito, imos considerar agora o caso onde a variedade a estudar é un aberto *estrelado* $U \subset \mathbb{R}^n$ (é dicir, existe un punto $a \in U$ tal que para cada $x \in U$ o segmento que une a e x está contido en U), como son en particular os abertos convexos e o propio $\mathbb{R}^n$; o lema de Poincaré establece que toda forma diferencial pechada de grao $k \geq 1$ sobre U é exacta, isto é, $H^k(U) = 0$ e, como consecuencia, que toda forma pechada en calquera variedade diferenciable é localmente exacta. Imos ver previamente que a existencia dun certo operador linear $\mathcal{E}^*(M) \to \mathcal{E}^*(M)$ de grao -1 (unha homotopía de cadeas) garante a anulación de grupos de cohomoloxía.

Lema 4.36. *Sexa M unha variedade diferenciable de dimensión n e sexa $k \geq 1$. Se existen aplicacións lineares $h_k \colon \mathcal{E}^{k+1}(M) \to \mathcal{E}^k(M)$ e $h_{k-1} \colon \mathcal{E}^k(M) \to \mathcal{E}^{k-1}(M)$ tales que $h_k \circ \mathbf{d} + \mathbf{d} \circ h_{k-1} = \mathrm{id}_{\mathcal{E}^k(M)}$, entón $H^k(M) = 0$.*

Demostración.

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{E}^{k-1}(M) \arrow[r, "\mathbf{d}"] & \mathcal{E}^k(M) \arrow[r, "\mathbf{d}"] \arrow[dl, "h_{k-1}"'] \arrow[d, "\mathrm{id}_{E^k(M)}"] & \mathcal{E}^{k+1}(M) \arrow[dl, "h_k"] \\
\mathcal{E}^{k-1}(M) \arrow[r, "\mathbf{d}"] & \mathcal{E}^k(M) \arrow[r, "\mathbf{d}"] & \mathcal{E}^{k+1}(M)
\end{tikzcd}$$

Sexa $\omega \in \mathcal{E}^k(M)$, $k \geq 1$, unha forma pechada. Entón

$$\omega = \mathrm{id}_{E^k(M)}(\omega) = (h_k \circ \mathbf{d} + \mathbf{d} \circ h_{k-1})(\omega) = \mathbf{d}(h_{k-1}\omega).$$

Así, $\eta = h_{k-1}(\omega) \in \mathcal{E}^{k-1}(M)$ é tal que $\omega = \mathbf{d}\,\eta$, polo que toda k-forma diferencial pechada é exacta, e logo $H^k(M) = 0$ para todo $k \geq 1$. □

Teorema 4.37 (Lema de Poincaré)**.** *Se $U \subset \mathbb{R}^n$ é un aberto estrelado respecto a 0 e $\omega \in \mathcal{E}^k(U)$ con $k \geq 1$ é tal que $\mathbf{d}\omega = 0$ entón existe unha forma diferencial $\eta \in \mathcal{E}^{k-1}(U)$ tal que $\omega = \mathbf{d}\eta$, isto é, $H^k(U) = 0$. En particular, $H^k(\mathbb{R}^n) = 0$ para todo $k \geq 1$.*

Demostración. Probaremos que existen aplicacións lineares h_k e h_{k-1} nas condicións do lema anterior. Consideramos o sistema de coordenadas sobre U definido pola función identidade, así que $\mathrm{id}_U = (x^1, \dots, x^n)$. Sexa ω unha k-forma diferencial sobre U coa expresión local

$$\omega = \sum_{1 \leq j_1 < \cdots < j_k \leq n} a_{j_1 \cdots j_k}\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}, \qquad a_{j_1 \cdots j_k} \in \mathcal{F}(U).$$

Observemos que se unha función $f\colon [0,1]\times U \to \mathbb{R}$ é diferenciable C^∞ entón tamén o é a función $g\colon U \to \mathbb{R}$ dada por

$$g(x) = \int_0^1 f(t,x)\,dt.$$

Logo, se consideramos a función $f\colon [0,1]\times U \to \mathbb{R}$ dada por $f(t,x) = t^{k-1}a_{j_1\dots j_k}(tx)$, a función $g_{j_1\cdots j_k}\colon U \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$g_{j_1\dots j_k}(x) = \int_0^1 t^{k-1}a_{j_1\dots j_k}(tx)\,dt$$

é diferenciable C^∞ (está ben definida por ser U estrelado respecto ao 0). Consideramos tamén a $(k-1)$-forma diferencial $\mu^{j_1\cdots j_k}$ sobre U dada por

$$\mu^{j_1\cdots j_k} = \sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}x^{j_r}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{j_r}}\wedge\dots dx^{j_k},$$

que permite definir a forma diferencial de grao $k-1$ sobre U

$$h_{k-1}(\omega) = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} g_{j_1\dots j_k}\mu^{j_1\dots j_k},$$

o que da lugar á aplicación linear $h_{k-1}\colon \mathcal{E}^k(U) \to \mathcal{E}^{k-1}(U)$. Pódese escribir, para cada $x\in U$,

$$(h_{k-1}\omega)_x = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n} g_{j_1\dots j_k}(x)\,\mu_x^{j_1\cdots j_k} = \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}\Big(\int_0^1 t^{k-1}a_{j_1\dots j_k}(tx)\,dt\Big)\,\mu_x^{j_1\cdots j_k},$$

e polo tanto

$$\begin{aligned}\mathbf{d}(h_{k-1}\omega) &= \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}\big(dg_{j_1\dots j_k}\wedge\mu^{j_1\dots j_k} + g_{j_1\dots j_k}\mathbf{d}\mu^{j_1\cdots j_k}\big)\\ &= \sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}\left\{\sum_{i=1}^{n}\Big(\frac{\partial g_{j_1\dots j_k}}{\partial x^i}\Big)dx^i\wedge\mu^{j_1\cdots j_k} + g_{j_1\dots j_k}\mathbf{d}\mu^{j_1\cdots j_k}\right\}.\end{aligned}$$

Agora, por unha parte,

$$\Big(\frac{\partial g_{j_1\dots j_k}}{\partial x^i}\Big)_x = \int_0^1 t^k\Big(\frac{\partial a_{j_1\dots j_k}}{\partial x^i}\Big)_{tx}dt,$$

e por outra,

$$\mathbf{d}\mu^{j_1\cdots j_k} = \sum_{r=1}^{k}(-1)^{r-1}dx^{j_r}dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge\widehat{dx^{j_r}}\wedge\dots dx^{j_k} = k\,dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}.$$

Polo tanto, para cada $x \in U$

$$\big((\mathbf{d} \circ h_{k-1})(\omega)\big)_x = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^k \Big(\frac{\partial a_{j_1 \dots j_k}}{\partial x^i} \Big)_{tx} dt \Big) \big(dx^i \wedge \mu^{j^1 \dots j^k} \big)_x$$
$$+ k \Big(\int_0^1 t^{k-1} a_{j_1 \dots j_k}(tx)\, dt \Big) \big(dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} \big)_x \Big\} .$$

Tal como está definida h_{k-1} nas k-formas diferenciais sobre U, defínese a aplicación linear $h_k \colon \mathcal{E}^{k+1}(U) \to \mathcal{E}^k(U)$, co que dada a expresión en coordenadas da diferencial exterior de ω

$$\mathbf{d}\,\omega = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \Big(\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial a_{j_1 \dots j_k}}{\partial x^i} \Big) dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} ,$$

tense, para cada $x \in U$,

$$\big(h_k(\mathbf{d}\,\omega) \big)_x = \sum_{1 \le j_1 < \cdots < j_k \le n} \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^k \Big(\frac{\partial a_{j_1 \dots j_k}}{\partial x^i} \Big)_{tx} dt \Big)\, \mu_x^{i, j_1 \dots j_k} ,$$

onde $\mu^{i,j_1 \dots j_k}$ é a k-forma diferencial sobre U dada por

$$\mu^{i,j_1 \dots j_k} = x^i\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} + \sum_{r=1}^{k} (-1)^r x^{j_r} dx^i \wedge dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge \widehat{dx^{j_r}} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k}$$
$$= x^i\, dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_r} - dx^i \wedge \mu^{j_1 \dots j_k} .$$

Así, para cada $x \in U$, tense

$$(\mathbf{d}\, h_{k-1}\omega + h_k \mathbf{d}\,\omega)_x$$
$$= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \Big\{ \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^k \Big(\frac{\partial a_{j_1 \dots j_k}}{\partial x^i} \Big)_{tx} dt \Big) \big(dx^i \wedge \mu^{j^1 \dots j^k} \big)_x + k \Big(\int_0^1 t^{k-1} a_{j_1 \dots j_k}(tx)\, dt \Big) \big(dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} \big)_x \Big\}$$
$$+ \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \sum_{i=1}^{n} \Big\{ \Big(\int_0^1 t^k \Big(\frac{\partial a_{j_1 \dots j_k}}{\partial x^i} \Big)_{tx} dt \Big) (x^i dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k})_x - \Big(\int_0^1 t^k \Big(\frac{\partial a_{j_1 \dots j_k}}{\partial x^i} \Big)_{tx} dt \Big) (dx^i \wedge \mu^{j_1 \dots j_k})_x \Big\}$$
$$= \sum_{j_1 < \cdots < j_k} \Big\{ k \Big(\int_0^1 t^{k-1} a_{j_1 \dots j_k}(tx) dt \Big) + \sum_{i=1}^{n} \Big(\int_0^1 t^k \Big(\frac{\partial a_{j_1 \dots j_k}}{\partial x^i} \Big)_{tx} dt \Big) x^i(x) \Big\} \big(dx^{j_1} \wedge \cdots \wedge dx^{j_k} \big)_x .$$

Se poñemos $\alpha \colon t \in [0,1] \to \alpha(t) = a_{j_1 \dots j_k}(tx) \in U \subset \mathbb{R}^n$, onde $x \in U$, pola regra da cadea

$$\alpha'(t) = \sum_{i=1}^{n} x^i(x) \Big(\frac{\partial a_{j_1 \dots j_k}}{\partial x^i} \Big)_{tx},$$

e pódese escribir, para cada $x \in U$ (onde na segunda e na terceira igualdade aparece

$\beta\colon t\in[0,1]\to\beta(t)=t^k\alpha(t)\in U$),

$$\begin{aligned}(\mathbf{d}\,h_{k-1}\omega+h_k\mathbf{d}\,\omega)_x&=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}\Big\{k\Big(\int_0^1 t^{k-1}\alpha(t)dt\Big)+\int_0^1 t^k\alpha'(t)dt\Big\}\big(dx^{j_1}\wedge\ldots\wedge dx^{j_k}\big)_x\\&=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}\Big\{\int_0^1\beta'(t)dt\Big\}\big(dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}\big)_x\\&=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}\big(\beta(1)-\beta(0)\big)\big(dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}\big)_x\\&=\sum_{1\le j_1<\cdots<j_k\le n}a_{j_1\ldots j_k}(x)\big(dx^{j_1}\wedge\cdots\wedge dx^{j_k}\big)_x\\&=\omega_x.\end{aligned}$$

Polo lema 4.36 conclúese que $H^k(U)=0$. □

Como consecuencia, dado que todo punto de calquera variedade diferenciable ten unha veciñanza aberta difeomorfa a unha bóla aberta euclidiana e pola naturalidade da diferencial exterior (proposición 4.29), toda forma diferencial pechada é localmente exacta:

Corolario 4.38. *Se M é unha variedade diferenciable de dimensión n e $\omega\in\mathcal{E}^k(M)$, $k\ge1$, é unha forma pechada, entón para cada $p\in M$ existe unha veciñanza aberta U de p e unha forma diferencial $\eta\in\mathcal{E}^{k-1}(U)$ tal que $(\mathbf{d}\eta)_{|U}=\omega_{|U}$.*

Observación 4.39. A diferencial exterior **d** ten un papel significativo na teoría de integración en variedades. A súa importancia radica no feito de que é un operador linear que está definido exclusivamente pola estrutura diferenciable da variedade e é invariante por aplicacións diferenciables, como xa vimos na proposición 4.29. En vista desta propiedade, e como xa vimos en 4.32, calquera aplicación diferenciable entre variedades diferenciables $f\colon M\to N$ induce un homomorfismo entre os correspondentes grupos de cohomoloxía de De Rham, que é un isomorfismo se f é un difeomorfismo. Tamén é importante observar que, aínda que a definición dos grupos de cohomoloxía de De Rham dunha variedade diferenciable está ligada á súa estrutura diferenciable, en realidade só dependen da súa topoloxía (é dicir, son invariantes topolóxicos, e ademais invariantes de homotopía). En efecto, se $f\colon M\to N$ é un homeomorfismo, e incluso se é unha equivalencia de homotopía, f pódese aproximar por unha aplicación diferenciable $\tilde f\colon M\to N$ que induce un isomorfismo entre os correspondentes grupos de cohomoloxía de De Rham $\tilde f^*\colon H^k(N)\to H^k(M)$ (Lee [9, pp. 445-446]). En particular, para unha variedade diferenciable contráctil M, $H^k(M)=0$ para cada $k\ge1$, o que xeneraliza o lema de Poincaré de abertos estrelados en $\mathbb{R}^n$ a variedades contráctiles.

Por outra banda, a diferencial exterior é unha extensión abstracta do gradiente, o rotacional e a diverxencia do cálculo vectorial, e moitas das ecuacións da física, a análise e a xeometría teñen unha forma simple ao expresarse en termos de $\mathbf{d}$.

Exemplo 4.40. Consideremos un subconxunto aberto U de $\mathbb{R}^3$, co sistema de coordenadas identidade $\mathrm{id}_U = (x, y, z)$. Sexan $f \in \mathcal{F}(U)$, $X = \lambda\,\partial_x + \mu\,\partial_y + \nu\,\partial_z \in \mathfrak{X}(U)$, onde $\lambda, \mu, \nu \in \mathcal{F}(U)$. O *gradiente* de f, o *rotacional* de X, e a *diverxencia* de X defínense por:

$$\begin{aligned}
\mathsf{grad}\, f &= \frac{\partial f}{\partial x}\,\partial_x + \frac{\partial f}{\partial y}\,\partial_y + \frac{\partial f}{\partial z}\,\partial_z \in \mathfrak{X}(U)\,,\\
\mathsf{rot}\, X &= \left(\frac{\partial \nu}{\partial y} - \frac{\partial \mu}{\partial z}\right)\partial_x + \left(\frac{\partial \lambda}{\partial z} - \frac{\partial \nu}{\partial x}\right)\partial_y + \left(\frac{\partial \mu}{\partial x} - \frac{\partial \lambda}{\partial y}\right)\partial_z \in \mathfrak{X}(U)\,,\\
\mathsf{div}\, X &= \frac{\partial \lambda}{\partial x} + \frac{\partial \mu}{\partial y} + \frac{\partial \nu}{\partial z} \in \mathcal{F}(U)\,.
\end{aligned}$$

Consideramos as aplicacións α, β e $\star$ dadas por:

$$\begin{array}{ccccccccc}
\mathcal{E}^1(U) & \xleftarrow{\alpha} & \mathfrak{X}(U) & \xrightarrow{\beta} & \mathcal{E}^2(U)\,, & \qquad & \mathcal{F}(U) = \mathcal{E}^0(U) & \xrightarrow{\star} & \mathcal{E}^3(U)\\
\alpha_X & \longleftarrow\!\!\shortmid & X & \longmapsto & \beta_X & & f & \longmapsto & f\,dx \wedge dy \wedge dz\,,
\end{array}$$

onde α e β fan corresponder ao campo de vectores diferenciable $X = \lambda\,\partial_x + \mu\,\partial_y + \nu\,\partial_z$ sobre U as formas diferenciais

$$\alpha_X = \lambda\,dx + \mu\,dy + \nu\,dz \in \mathcal{E}^1(U), \qquad \beta_X = \lambda\,dy \wedge dz - \mu\,dx \wedge dz + \nu\,dx \wedge dy \in \mathcal{E}^2(U).$$

O seguinte diagrama conmutativo resume as relacións entre os operadores gradiente, rotacional, diverxencia e diferencial exterior no aberto U:

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{F}(U) \arrow[r, "\mathsf{grad}"] \arrow[d, equal] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\mathsf{rot}"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathfrak{X}(U) \arrow[r, "\mathsf{div}"] \arrow[d, "\beta"] & \mathcal{F}(U) \arrow[d, "\star"]\\
\mathcal{E}^0(U) \arrow[r, "\mathbf{d}"] & \mathcal{E}^1(U) \arrow[r, "\mathbf{d}"] & \mathcal{E}^2(U) \arrow[r, "\mathbf{d}"] & \mathcal{E}^3(U)
\end{tikzcd}$$

É dicir, se $f \in \mathcal{F}(U)$ e $X \in \mathfrak{X}(U)$, entón

(I) $\mathbf{d}\,f = \alpha_{\mathsf{grad}\, f}\,, \quad \mathbf{d}\,\alpha_X = \beta_{\mathsf{rot}\, X}\,, \quad \mathbf{d}\,\beta_X = (\mathsf{div}\, X)\,dx \wedge dy \wedge dz\,.$

(II) $\mathsf{rot}\ \mathsf{grad}\, f = 0, \qquad \mathsf{div}\ \mathsf{rot}\, X = 0\,.$

En termos da cohomoloxía de De Rham podemos poñer

$$H^0(U) = \mathrm{Ker}(\mathsf{grad}), \quad H^1(U) = \mathrm{Ker}(\mathsf{rot})/\,\mathrm{Im}(\mathsf{grad}), \quad H^2(U) = \mathrm{Ker}(\mathsf{div})/\,\mathrm{Im}(\mathsf{rot}).$$

Pola proposición 4.33, tense que U é conexo se, e só se, $\mathrm{Ker}(\mathsf{grad}) = \mathbb{R}$, e polo lema de Poincaré (teorema 4.37 e observación 4.39), se U é contráctil entón $H^k(U) = 0$ para $k \geq 1$, logo para un aberto U contráctil tense

(III) se $\mathsf{rot}\, X = 0$, existe unha función $f \in \mathcal{F}(U)$ tal que $X = \mathsf{grad}\, f$;

se $\mathsf{div}\, X = 0$, existe un campo de vectores $Y \in \mathfrak{X}(U)$ tal que $X = \mathsf{rot}\, Y$.

Observación 4.41. As formas diferenciais non só poden ser diferenciadas, tamén poden ser integradas. De feito, ás veces introdúcense as formas diferenciais como os integrandos axeitados na teoría das variedades diferenciables. As súas propiedades alxébricas especiais e as boas propiedades de invariancia fan que as formas, en contraposición coas funcións reais, sexan os obxectos apropiados para a integración en variedades. Cando se expresa na linguaxe das formas diferenciais, un resultado clásico como o teorema de Stokes convértese nun teorema xeral simple e elegante: Nunha variedade diferenciable n-dimensional segundo numerable e orientada, dada unha forma diferencial ω de grao $n-1$ con soporte compacto verifícase

$$\int_D \mathbf{d}\omega = \int_{\partial\,\mathrm{D}} \omega.$$

Este teorema tamén é unha xeneralización do teorema fundamental do cálculo, e dos teoremas clásicos de integración de Green, Gauss e Stokes. Por outra banda, cabe sinalar que amosa unha relación significativa entre os operadores $\mathbf{d}$ e $\int$ ao operar sobre formas diferenciais e a operación ∂ que ou ben aos dominios regulares (equivalentemente, ás variedades con bordo) ou ben ás cadeas singulares lles fai corresponder o seu bordo.

Bibliografía

[1] Aubin, Thierry, *A Course in Differential Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, 27, The American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

[2] Bott, R., Milnor, J., On the parallelizability of the spheres, *Bull. Amer. Math. Soc.* **64** (1958) 87–89.

[3] Burke, William L., *Aplied Differential Geometry*, Cambridge University Press, Cambridge, 1985.

[4] Frankel, Theodore, *The Geometry of Physics. An Introduction*, 3rd ed., Cambridge University Press, Cambridge, 2012.

[5] Göckeler M., Schücker T., *Differential Geometry, Gauge Theories, and Gravity*, Cambridge Monographs on Mathematical Physics, Cambridge University Press, Cambridge, 1987.

[6] Godbillon, Claude, *Géometétrie diférentielle et mécanique analytique*, Collection Méthodes, Hermann, Paris, 1969.

[7] Greub, W., Halperin, S., Vanstone, R., *Connections, Curvature, and Cohomology, Volume I*, Pure and Applied Mathematics. A Series of Monographs and Textbooks, 47, Academic Press, New York, 1972.

[8] Kobayashi, S., Nomizu, K., *Foundations of Differential Geometry, Volume I*, Intersience Publishers, New York, 1963.

[9] Lee, John M., *Introduction to Smooth Manifolds*, 2nd ed., Graduate Texts in Mathematics, 218, Springer, New York, 2013.

[10] Matsushima, Yozo, *Differentiable Manifolds*, M. Dekker, New York, 1972.

[11] Morita, Shigeyuki, *Geometry of Differential Forms*, Translations of Mathematical Monographs, 201, The American Mathematical Society, Providence, Rhode Island, 2001.

[12] Pham Mau Quan, *Introduction à la géométrie des variétés différentiables*, Duned, Paris, 1969.

[13] Rudolph, G., Schmidt, M., *Differential Geometry and Mathematical Physics. Part I. Manifolds, Lie Groups and Hamiltonian Systems.*, Theoretical and Mathematical Physics, Springer, Dordrecht, 2013.

[14] Rudolph, G., Schmidt, M., *Differential Geometry and Mathematical Physics. Part II. Fibre Bundles, Topology and Gauge Fields.*, Theoretical and Mathematical Physics, Springer, Dordrecht, 2017.

[15] Tu, Loring W., *An Introduction to Manifolds*, 2nd ed., Springer, New York, 2011.

[16] Warner, Frank W., *Foundations of Differentiable Manifolds and Lie Groups*, Graduate Texts in Mathematics, 94, Springer-Verlag, New York, 1983